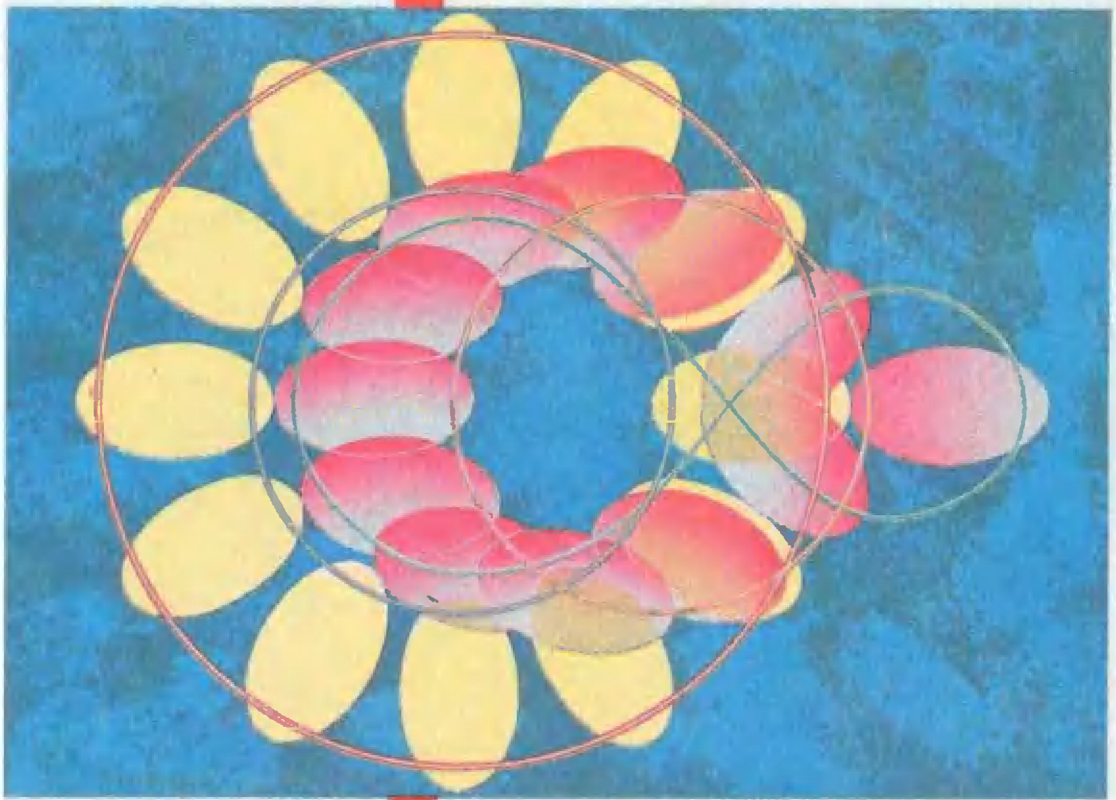
Квант

ISSN 0130-2221

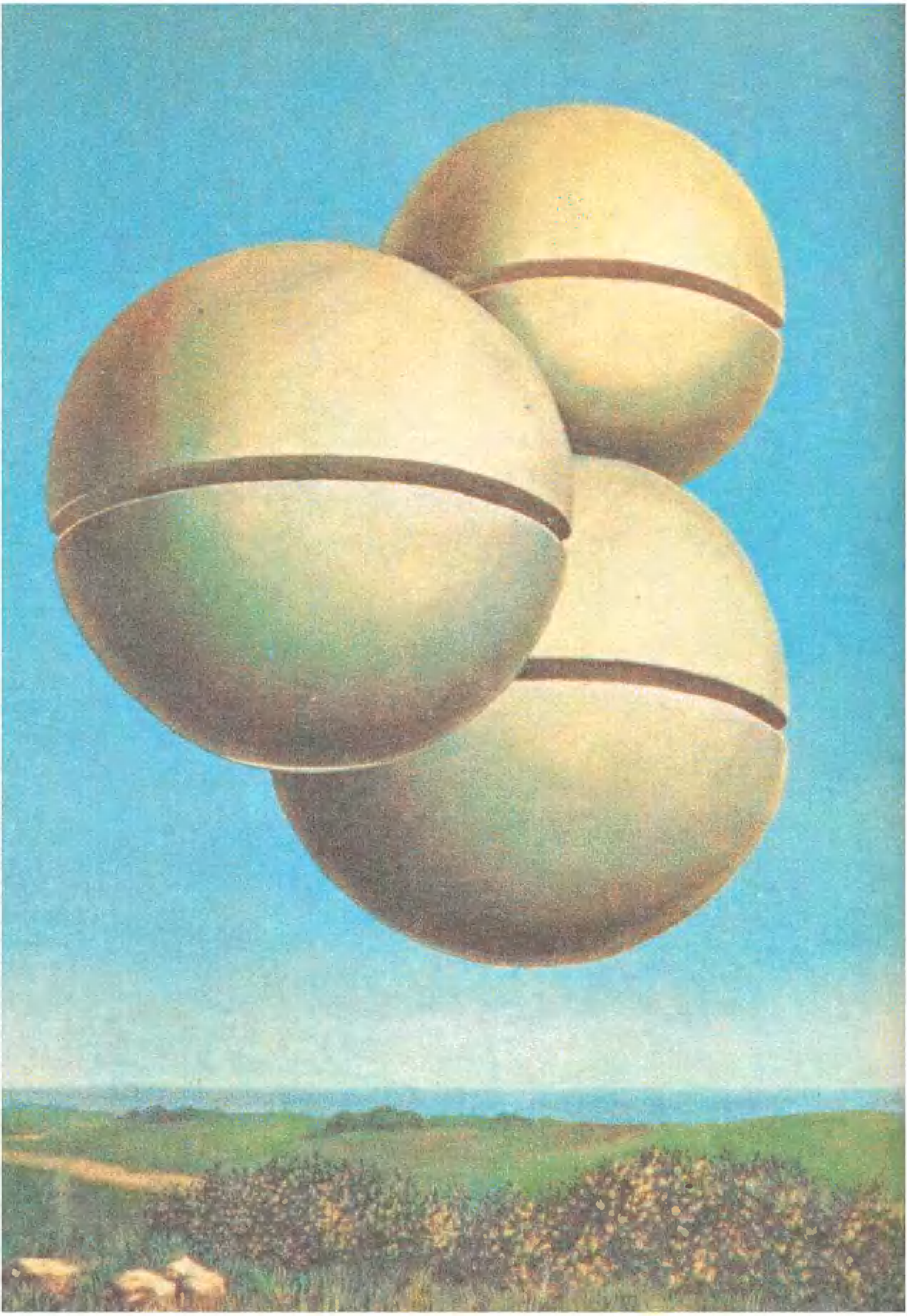
Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Эллипс

1990



Квант

1990
5

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Москва, «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Наша обложка

1 *Несколько моментов работы эллиптической передачи. Желтый эллипс вращается равномерно вокруг одного из своих фокусов, который, в свою очередь, равномерно движется по окружности. По аналогичной окружности движется и один из фокусов красного эллипса, который все время касается желтого. А второй его фокус движется по «восьмерке». Эллипс — тема «Калейдоскопа» этого номера.*

2 *На этой картине бельгийского художника Р. Магрита (1898—1967) изображены три эллипсоида. С какой силой они притягивают друг друга? Об этом вы узнаете из статьи «О ньютоновском притяжении эллипсоидов».*

3 *Шахматная страничка.*

4 *Новая головоломка: укладывание шариков в куб.*

СЛУЧАЙ В ПОЕЗДЕ

Доктор физико-математических наук
А. ВАРЛАМОВ,
доктор К. КАМЕРЛИНГО (Италия)

Недавно авторам этих строк довелось возвращаться на железнодорожном экспрессе из Венеции в Неаполь. Поезд шел очень быстро (со скоростью около 150 км/ч), за окном мелькали пейзажи, будто сошедшие с полотен мастеров Возрождения. В полном согласии с их картинами местность была холмистая, и поезд то летел по мосту, то нырял в очередной туннель. В одном из особенно длинных туннелей вблизи Флоренции у нас неожиданно «заложи́ло» уши, так, как это бывает при взлете или посадке у пассажиров самолета. Судя по внешним признакам, та же участь постигла и наших попутчиков — все в вагоне крутили головами, пытаясь избавиться от неприятного ощущения. Когда же поезд, наконец, вырвался из тесного туннеля, оно прошло само собой, и лишь у одного из нас, не привыкшего к таким сюрпризам на железной дороге, остался вопрос о происхождении этого эффекта. Поскольку он явно был связан с перепадом давления, мы стали оживленно обсуждать возможные физические причины явления. На первый взгляд казалось очевидным, что при наличии поезда давление воздуха между стенками туннеля и обшивкой поезда должно повыситься, однако по мере того, как мы углублялись в задачу, это соображение казалось все менее и менее бесспорным. Вскоре у нас было готово объяснение, которое мы и хотим вам предложить.

Рассмотрим поезд с площадью поперечного сечения $S_п$, движущийся с постоянной скоростью внутри длинного туннеля с площадью поперечного сечения S_0. Сразу же перейдем в систему отсчета, связанную с поездом. Течение воздуха будем считать установившимся, а вязкостью воздуха пренебрежем. В этом случае движение стенок туннеля относительно поезда можно не учитывать — ввиду отсутствия вязкости оно не оказывает влияния на течение воздуха. Будем также считать поезд достаточно длинным, чтобы можно было пренебречь краевыми эффектами у переднего и заднего вагонов, а давление воздуха в туннеле будем считать установившимся и постоянным вблизи обшивки всего поезда.

Так мы, путем отказа от второстепенных деталей, перешли от реального движения поезда к упрощенной физической модели, которую уже можно попробовать описать математически. Итак. Имеется труба (бывший туннель), в которой соосно с ней покоится цилиндр (бывший поезд) с обтекаемыми концами. Сквозь трубу продувается воздух: вдали от поезда (сечение $A—A$ на рисунке) давление воздуха p_0 равно атмосферному, а скорость воздушного потока $v_п$ равна по величине и противоположна по направлению скорости, с которой до перехода в нашу систему отсчета двигался поезд. Рассмотрим некоторое сечение $B—B$ (на всякий случай подальше от концов поезда, чтобы наши предположения действительно выполнялись). Обозначим давление воздуха в этом сечении через p, а скорость потока воздуха через v. Эти величины можно связать с $v_п$ и p_0 с помощью уравнения Бернулли:

$$p+\frac{\rho v^2}{2}=p_0+\frac{\rho v_п^2}{2}, \qquad (1)$$

где ρ — плотность воздуха. Сразу же подчеркнем, что мы записываем уравнение Бернулли в виде так называемого приближения несжимаемой жидкости. Это накладывает дополнительные ограничения, которые стоит обсудить подробнее. Можно ли считать плотность воздуха в рассматриваемой задаче постоянной? Вопрос непростой, и строгий ответ на него может быть дан только с помощью гораздо более сложного рассмотрения на основании общего уравнения Бернулли (называемого интегралом Бернулли), справедливого и для сжимаемой жидкости. Мы же приведем лишь наводящие физические соображения. Если скорость потока не слишком велика (что это означает, станет ясно позже) и мы пренебрегли вязкостью воздуха, то изменением температуры воздуха можно пренебречь. Тогда плотность будет изменяться в такой же степени, как и давление воздуха. Мы ожидаем получить небольшое изменение давления, которое будет определяться обычной плотностью воздуха. Последняя может быть найдена из уравнения Менделеева — Клапейрона, примененного для воздуха вдали от поезда:

$$\rho = \frac{p_0 \mu}{RT}. \qquad (2)$$

Нетрудно увидеть предел, где наше предположение о постоянстве плотности ρ заведомо не выполняется: если скорость потока воздуха в каком-либо из сечений трубы становится сравнимой со среднеквадратичной *скоростью теплового движения молекул*, то тут уже ни о каком постоянстве ρ в различных сечениях говорить не приходится. Действительно, ведь именно эта скорость определяет характерное время установления средней плотности газа в макроскопическом объеме, поэтому при столь высоких скоростях потока она, плотность, просто не будет успевать устанавливаться при переходе от одного сечения к другому. Однако, как мы увидим ниже, это ограничение может оказаться недостаточным. А пока будем считать плотность ρ постоянной.

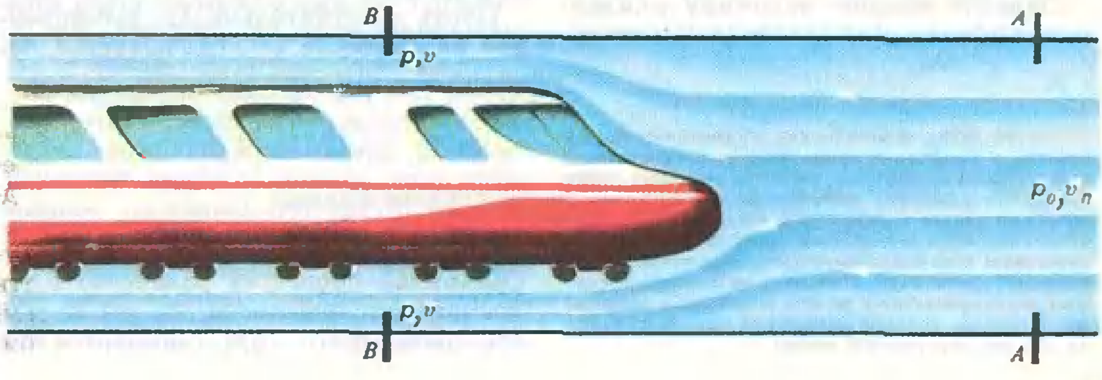
В уравнении (1) две неизвестные величины — p и v, поэтому для определения p необходимо еще одно соотношение. Его нам даст условие неизменности массы воздуха, протекающей через любое сечение в единицу времени (при течении в трубе масса не может ни возникать, ни исчезать):

$$\rho v_п S_0 = \rho v (S_0 - S_п). \qquad (3)$$

(Об этом соотношении часто говорят как об условии непрерывности потока.) Избавляясь с помощью (3) от скорости v в (1) и подставляя выражение (2) для плотности ρ, находим давление воздуха в туннеле:

$$p = p_0\left(1 - \frac{\mu v_п^2}{2RT}\left(\left(\frac{S_0}{S_0 - S_п}\right)^2 - 1\right)\right). \qquad (4)$$

Входящая в это выражение комбинация параметров $\mu v_п^2/RT$, очевидно, безразмерна. Следовательно, величина $\sqrt{RT/\mu}$ имеет размерность скорости. В ней, с точностью до коэффициента, можно сразу же усмотреть среднеквадратичную скорость теплового движения молекул. Однако при анализе рассматриваемой аэродинамической задачи для нас будет важна другая характеристика газа — скорость распространения в нем звука, которую авторам уже давно хочется ввести. Она, как и скорость теплового движения молекул, определяется температурой и молекулярной массой газа, и численное значение скорости звука $v_{зв}$ зависит еще от так называемого пока-



зателя адиабаты γ — характерного для каждого газа числа порядка 1 (для воздуха $\gamma=1{,}41$):

$$v_{зв}=\sqrt{\gamma RT/\mu}. \qquad (5)$$

При нормальных условиях $v_{зв}=335$ м/с (т. е. примерно 1200 км/ч). Используя определение (5), мы можем переписать выражение (4) для давления p в удобном для дальнейшего обсуждения виде (подставив $\mu/RT=\gamma/v^2_{зв}$):

$$p=p_0\left(1-\frac{\gamma}{2}\left(\frac{v_п}{v_{зв}}\right)^2\times\left(\left(\frac{S_0}{S_0-S_п}\right)^2-1\right)\right). \qquad (6)$$

Теперь пришло время остановиться и подумать. Мы вычислили давление вблизи обшивки поезда внутри туннеля. Однако наши уши заболели не от самого давления, а от его изменения при входе поезда в туннель по сравнению с давлением p_0 вблизи обшивки поезда при его движении по свободному пространству.*) Перепад давления мы можем сразу же определить с помощью выражения (6): относительное изменение давления $\frac{\Delta p}{p_0}=\frac{p-p_0}{p_0}$ составляет

$$\frac{\Delta p}{p_0}=-\frac{\gamma}{2}\left(\frac{v_п}{v_{зв}}\right)^2\times\left(\left(\frac{S_0}{S_0-S_п}\right)^2-1\right). \qquad (7)$$

Прежде всего отметим, что, как видно из (7), при входе в туннель давление вблизи обшивки движущегося поезда понижается (а не повышается, как нам показалось вначале).

Давайте оценим величину найденного эффекта. Для узкого (двухпутевого) железнодорожного туннеля можно принять, что $S_п=\frac{1}{4}S_0$. Величины $v_п=150$ км/ч и $v_{зв}=1200$ км/ч уже приводились выше. Таким образом, находим, что

$$\frac{\Delta p}{p_0}=-\frac{1{,}41}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\left(\frac{4}{3}\right)^2-1\right)\approx-1\%.$$

Как мы и ожидали, изменение давления оказалось малым, и, следовательно, сделанное выше предположение подтвердилось — изменением плотности воздуха действительно можно было пренебречь. Однако такая малость относительной величины изменения давления не означает, что человеческий организм не в состоянии ее почувствовать. Действительно, если мы вспомним, что $p_0=10^5$ Н/м^2 и примем площадь нашей барабанной перепонки за $\sigma=1$ см^2, то избыточная сила давления, действующая на нее изнутри, составит $\Delta F=\sigma\cdot\Delta p\sim 0{,}1$ Н, что уже вполне заметно.

Казалось бы, эффект объяснен и можно ставить точку. Однако что-то беспокоило нас в полученной формуле. И мы быстро обнаружили, что именно: из выражения (7) следует, что даже при нормальном для обычных поездов соотношении $v_п/v_{зв}\ll 1$ (эта комбинация скоростей постоянно встречается в аэродинамике и носит название числа Маха) в очень узком туннеле, когда $S_п\to S_0$, величина $|\Delta p|$ может стать порядка p_0 и даже превысить эту величину! Ясно, что в этом случае мы выходим за рамки ограничений, сделанных выше. Но где именно? Ведь, казалось бы, соотношение $v_п\ll v_{зв}$ весьма надежно защищает нас от неожиданностей. Попробуем разобраться.

Пусть действительно Δp, вычисленное по формуле (7) оказывается порядка p_0. Это означает, что

$$\frac{v_п}{v_{зв}}\left(\frac{S_0}{S_0-S_п}\right)\sim 1,$$

и, следовательно,

$$v_пS_0\sim v_{зв}(S_0-S_п).$$

Сравнивая последнее равенство с условием непрерывности (3), мы видим, что произошло: $|\Delta p|$ становится по-

*) Тут стоит отметить два обстоятельства. Во-первых, в биофизике существует так называемый закон Вебера — Хефнера, согласно которому любое изменение внешнего воздействия воспринимается органами чувств только тогда, когда относительное изменение этого воздействия превышает некоторую пороговую величину. Во-вторых, если туннель оказывается достаточно длинным, то организм успевает адаптироваться к новым условиям и неприятное ощущение исчезает. Однако на выходе из туннеля оно вас подстерегает вновь.

рядка p_0, когда скорость протекания потока воздуха между обшивкой поезда и стенками туннеля оказывается порядка скорости звука, а в этом случае, как мы уже говорили, все наше рассмотрение оказывается неприменимым. Следовательно, условием применимости выражения (7) является не только условие $v_п \ll v_{зв}$, но и более жесткое:

$$v_п \ll v_{зв}\left(\frac{S_0-S_п}{S_0}\right).$$

Для реальных поездов и туннелей оно, очевидно, выполняется всегда. Тем не менее наше исследование пределов применимости полученной формулы не следует рассматривать как простое математическое упражнение. Во-первых, физик должен всегда четко представлять «рабочую область» полученного им результата. Вторая причина, в данном случае, вполне практическая. Дело в том, что в последние десятилетия все чаще обсуждаются возможности создания принципиально новых видов транспорта, в том числе и на основе железнодорожного. Так, уже много лет назад была предложена идея поезда, движущегося на сверхпроводящей магнитной подушке. Это вагончик, внутри которого имеется мощный сверхпроводящий магнит. Благодаря создаваемому им магнитному полю, вагончик зависает над металлическим рельсом, и сопротивление движению определяется только аэродинамическими свойствами такого вагона. В Японии уже создана действующая модель этого вида транспорта. Экспериментальный образец перевозит 20 пассажиров вдоль линии длиной в 7 километров, развивая при этом максимальную скорость 516 км/ч! А ведь это уже почти половина скорости звука.

Следующим шагом на пути развития этого вида транспорта стала идея... заключить вагончик в герметическую трубу и создать там пониженное давление! Вот тут-то, как вы уже, наверное, сообразили, конструкторы и сталкиваются с рассмотренной нами задачей о поезде в туннеле, но в гораздо более сложном случае, когда $v_п \sim v_{зв}$ и $S_0 - S_п \ll S_0$. Движение разреженного воздуха здесь уже турбулентно, температура воздуха заметно меняется, и сегодня наука еще не знает ответов на многие вопросы, возникающие при решении подобных задач. Сделанная нами оценка позволяет вам понять некоторые из тех трудностей, которые встречаются на пути ученых.

В заключение предлагаем подумать над другими физическими вопросами, которые могут возникнуть при поездке в поезде.

1. Почему шум от движущегося поезда резко возрастает, когда поезд въезжает в туннель?

2. В последнее время на многих железных дорогах кладут так называемый «бархатный путь» — рельсы сваривают «в стык», не оставляя между ними зазора. А как же быть с тепловым расширением при изменении температуры?

3. Почему при встрече двух быстро движущихся навстречу друг другу поездов их окна испытывают удар? Куда направлена сила, действующая при этом на стекла,— наружу или внутрь вагона?

ЛАТИНСКИЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКИ

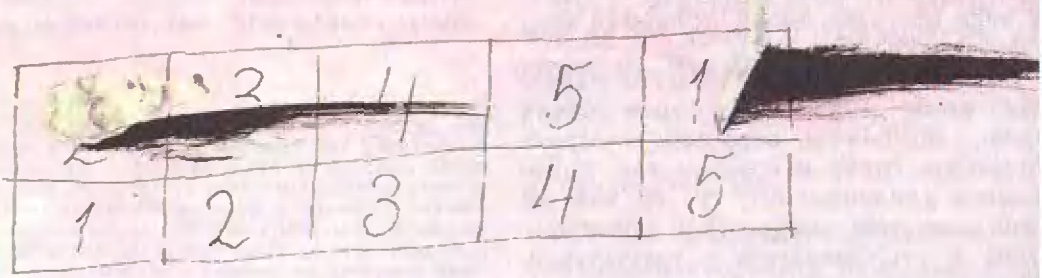
Кандидат физико-математических наук
В. ШЕВЕЛЕВ

О чем эта статья?

В этой статье речь пойдет о прямоугольниках, «населенных» различными натуральными числами. Если разбить прямоугольник прямыми, параллельными его основаниям, на $m \times n$ равных квадратов и «поселить» в этот mn-квартирный m-этажный «дом» с n «подъездами» в каждую «квартиру» одно из натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$, притом так, чтобы все числа на каждом «этаже» и в каждом «подъезде» были различны, то мы получим прямоугольник, который математики называют «латинским». В нем каждое из чисел $1, 2, \ldots, n$ повторяется m раз, т. е. «семьи» единиц, двоек, троек и т. д. занимают по m «квартир», но обязательно на разных «этажах» и в разных «подъездах». Раньше в этот «дом» вместо чисел «вселяли» буквы латинского алфавита, отчего и назвали его «латинским».

Есть математическая дисциплина, занимающаяся подсчетом числа различных наборов и конфигураций. Эта наука называется комбинаторикой.*) Задача перечисления латинских прямоугольников тоже относится к ком-

*) О многих интересных комбинаторных задачах вы можете прочитать в замечательной книге Н. Я. Виленкина «Популярная комбинаторика» (М., Наука, 1975).



бинаторике. Однако в общем виде эта задача необыкновенно трудна. Несмотря на то, что ею занимались крупнейшие математики, прошло более 200 лет между подсчетом числа «двухэтажных» и «трехэтажных» прямоугольников, первые из которых впервые перечислил француз Монмор еще в 1713 году, а вторые — американский математик Риордан всего 40 с небольшим лет назад. Кроме красивых явных формул Монмора и Риордана, о которых мы расскажем ниже, для этих прямоугольников были найдены и удобные рекуррентные формулы великим Эйлером (его формулу мы докажем) и индийцем Керавалой. Интересно, что Керавала опроверг «продержавшиеся» 12 лет (с 1930 по 1941) ошибочные рекуррентные формулы английского математика Джейкоба для числа «трехэтажных» латинских прямоугольников. Что ж, при решении трудных задач и такое бывает в математике!

Существование латинских прямоугольников

Теорема 1. *Для любых чисел $m \leqslant n$ существует латинский $m \times n$-прямоугольник.*

Доказательство. Будем «заселять» наш m-этажный «дом» с верхнего этажа. На m-м этаже «расселим» числа 1, 2, 3, ..., n в их естественном порядке. На $(m-1)$-м этаже «расселение» начнем с двойки: 2, 3, ..., n,1; на $(m-2)$-м этаже — с тройки: 3, 4, ..., n, 1, 2, и так далее; наконец, на 1-м этаже «расселение» начнем с числа m: m, $m+1$, ..., n, 1, 2,..., $m-1$. Тогда «дом» будет «заселен» так, как это сделано в таблице. Ясно, что при таком «заселении» нет двух одинаковых «жильцов» на одном «этаже» или в одном «подъезде». Следовательно, перед нами — «m-этажный» латинский прямоугольник длиной n. Значит, $m \times n$-прямоугольники существуют.

Два этажа

Перейдем теперь к подсчету числа латинских прямоугольников. Особенно просто решается задача для одноэтажных прямоугольников.

Теорема 2. *Число латинских $1 \times n$-прямоугольников равно* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Доказательство. Латинский $1 \times n$-прямоугольник — это просто произвольная перестановка из n чисел. Таких перестановок всего $n!$ (на первое место ставили любое из n чисел, на второе — любое из $n-1$ оставшихся, на третье — любое из $n-2$ оставшихся после этого и т. д.).

Перейдем к $2 \times n$-прямоугольникам. Верхняя строка этого прямоуголвника — любая перестановка. Нижняя строчка — перестановка, в которой на каждом месте стоит число, не равное числу, стоящему на том же месте в первой перестановке. Если мы произвольным образом переставим столбцы нашего прямоугольника, он останется латинским, и при этом верхнюю перестановку можно сделать любой. Из этого видно, что какую бы конкретную перестановку мы ни взяли, число латинских прямоугольников, у которых верхняя строчка совпадает именно с этой перестановкой, будет одним и тем же для всех перестановок. Назовем латинский $2 \times n$-прямоугольник *нормализованным*, если в его верхней строчке числа стоят подряд: 1, 2, 3, ..., $n-1$, n. Из сказанного видно, что число $L(2, n)$ латинских $2 \times n$-прямоугольников равно числу D_n нормализованных латинских $2 \times n$-прямоугольников, умноженному на число перестановок n чисел, т. е.

$$L(2, n) = n! \cdot D_n.$$

Для числа D_n нормализованных латинских $2 \times n$-прямоугольников имеется несколько изящных формул.

Теорема 3. (Формула Эйлера.) $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$.

Таблица

1	2	3	...	$n-1$	n
2	3	4	...	n	1
..	..	..	...	..	..
m	$m+1$	$m+2$	...	$m-2$	$m-1$

Это, как говорят, рекуррентная формула: если мы знаем D_1 и D_2, а, очевидно, $D_1=0$ и $D_2=1$, то мы можем найти с ее помощью последующие D_n:

$$D_3=2\cdot(1+0)=2,$$
$$D_4=3\cdot(2+1)=9,$$
$$D_5=4\cdot(9+2)=44,$$
$$D_6=5\cdot(44+9)=265$$

и т. д.

Доказательство. Всякую перестановку можно записать как систему циклов. Это делается так. Пусть, скажем, на 1-м месте стоит k_1, пишем $1\to k_1$. Если на k_1-м месте стоит k_2, напишем $1\to k_1\to k_2$. Затем $1\to k_1\to\to k_2\to k_3$ и так до тех пор, пока мы снова не дойдем до единицы (рис. 1). (Не может получиться, что в нашей последовательности появится одно из уже пройденных чисел раньше, чем единица. Скажем, если будет... $\to k_9\to\to k_{10}\to k_5$, то k_5 стоит на k_{10}-м месте и на k_4-м месте, а значит, $k_{10}=k_4$, точно так же $k_9=k_3$, ..., $k_6=1$.) Затем берем самое маленькое из чисел, не вошедших в наш цикл, и строим цикл, начиная с него. В конце концов все n чисел окажутся стоящими в циклах (рис. 2).

Число циклов может быть любым от 1 до n, и длина цикла может быть любой от 1 до n. Наше условие — что ни одно число не стоит на своем месте — запрещает циклы длиной 1.

Теперь построим по нашей перестановке перестановку длиной $n-1$ или $n-2$ и тоже без циклов длиной 1. Найдем на одном из циклов число n (рис. 3). Если длина этого цикла больше двух, мы просто выбросим n и соединим «накоротко» p с q (рис. 4). Если же n входит в цикл длиной 2, например в изображенный на рисунке 5, мы просто выбросим этот цикл и уменьшим все числа от $k+1$ до $n-1$ на единицу: $k+1\to k$, $k+2\to\to k+1$, ..., $n-1\to n-2$. В первом случае получится перестановка $n-1$ чисел, во втором случае — перестановка $n-2$ чисел. Сколькими способами у нас может получиться перестановка $n-1$ чисел? Ясно, что $n-1$ способами: чтобы вернуться к перестановке длиной n, мы должны разорвать любую стрелку $p\to q$ (а их $n-1$) и вставить туда n: $p\to n\to q$. Сколькими способами получается перестановка $n-2$ чисел? Снова $n-1$ способами: мы добавляем цикла $n\rightleftarrows k$, где k — любое число от 1 до $n-1$, и увеличиваем на единицу числа k, $k+1$, ..., $n-2$. Значит,

$$D_n=(n-1)D_{n-1}+(n-1)D_{n-2},$$

что и требовалось.

А вот другая рекуррентная формула для D_n, гораздо более простая.

Теорема 4. $D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$.

Доказательство. Пусть $D_n-nD_{n-1}=E_n$. Из формулы Эйлера

$$E_n=D_n-nD_{n-1}=$$
$$=(n-1)D_{n-1}+(n-1)D_{n-2}-nD_{n-1}=$$
$$=-D_{n-1}+(n-1)D_{n-2}=-E_{n-1}.$$

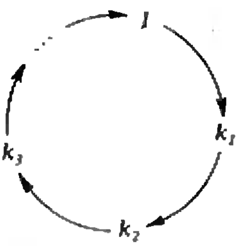
Значит,

$E_n=-E_{n-1}=E_{n-2}=...=(-1)^nE_2$. Но $E_2=1-2\cdot 0=1$, значит, $E_n=(-1)^n$ и $D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$.

Из последней формулы уже ничего не стоит найти не рекуррентную, а явную формулу для D_n.

Теорема 5. (Формула Монмора.)

$$D_n=n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$



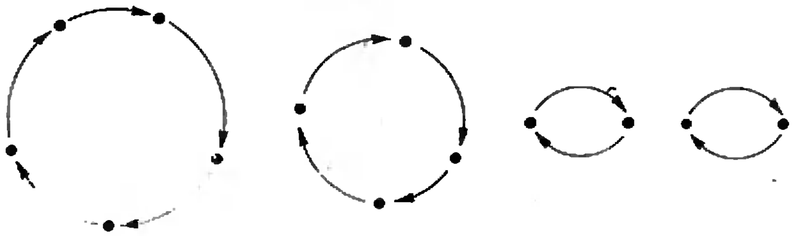


Рис. 1.

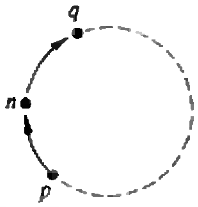


Рис. 3.

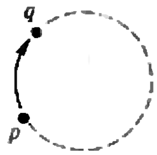


Рис. 4.

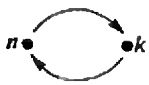


Рис. 5.

Доказательство.

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n = n((n-1)D_{n-2} + (-1)^{n-1}) + (-1)^n = n(n-1)D_{n-2} + (-1)^{n-1}n + (-1)^n = n(n-1)(n-2)D_{n-3} + (-1)^{n-2}n(n-1) + (-1)^{n-1}n + (-1)^n = \ldots = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3 \times D_2 - n(n-1)\cdot\ldots\cdot 4 + n(n-1)\cdot\ldots\cdot 5 - \ldots + (-1)^{n-1}n + (-1)^n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

Последнее выражение в скобках может показаться знакомым тем из вас, кто усвоил в школе начала анализа. Нам оно тоже кажется знакомым, но мы отложим его «опознание» до заключительного раздела статьи.

Что же касается самой формулы Монмора, она была доказана раньше двух вышеприведенных формул. Ее прямое доказательство основано на формуле «включения—исключения»; читатели, знакомые с этой формулой, выведут из нее формулу Монмора без большого труда, а мы обратимся к трехэтажным латинским прямоугольникам.

Три этажа

Попытки нахождения числа $L(3, n)$ латинских $3\times n$-прямоугольников завершились в 1944 году, когда американский математик Риордан, опираясь на результаты длинной цепочки предшественников, выписал, наконец, окончательную формулу. Мы не приводим здесь не только вывода формулы (далеко выходящего за рамки школьной программы), но и самой формулы, которая тоже довольно громоздка. Ограничимся тем, что приведем рекуррентную формулу, которая называется формулой Керавала—Риордана: если $K_n = \frac{1}{n!}L(3, n)$, то

$$K_n = n^2K_{n-1} + n(n-1)K_{n-2} + 2n(n-1)(n-2)K_{n-3} + (-1)^n(e_n + 2ne_{n-1}) \quad (n \geqslant 4),$$

где e_n находится из своей рекуррентной формулы (напоминающей формулу для D_n):

$$e_0 = 1, \quad e_n = ne_{n-1} + (-2)^n.$$

Пользуясь этими формулами и тем, что $K_1 = K_2 = 0$, $K_3 = 2$, мы можем найти K_n при всех n. Например,

$$K_5 = 552,$$
$$K_7 = 1073760;$$

уже из этих равенств видно, что числа K_n стремительно растут; числа $L(3, n)$, разумеется, растут еще быстрее.

Приближенные формулы

Выражение $\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}$ показалось нам знакомым потому, что оно напоминает степенной ряд для e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

В частности,

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!} \approx 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots = e^{-1},$$

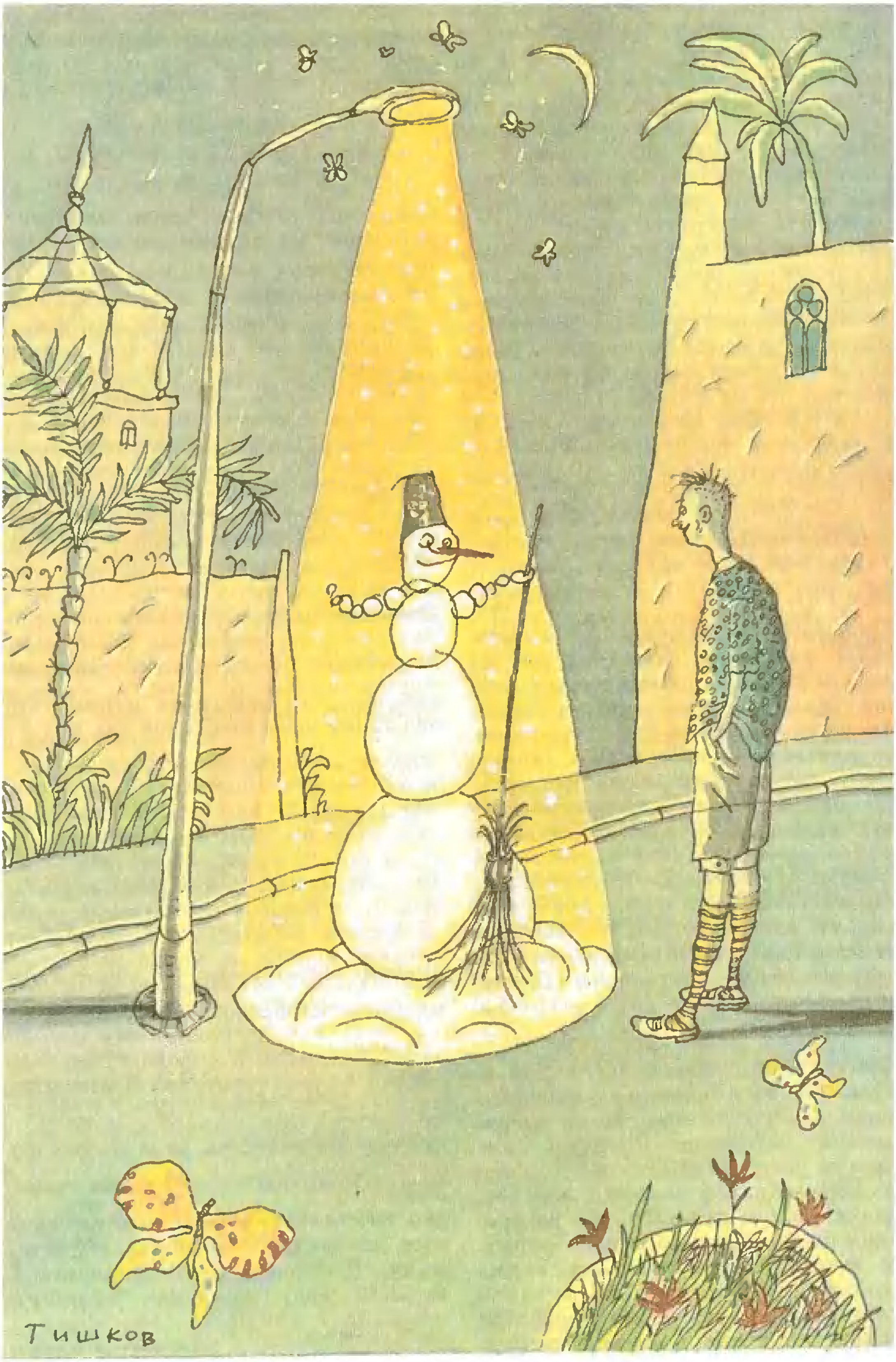
причем погрешность по абсолютной величине не превосходит $\frac{1}{(n+1)!}$.

Значит,

$$D_n \approx n!e^{-1} = \frac{n!}{e},$$

причем погрешность не превосходит $\frac{1}{n+1}$. (Поскольку D_n есть целое число, оно восстанавливается по этим данным однозначно.) Обобщая эту формулу, П. Эрдеш и И. Капланский в 1946 году получили изящную

(Окончание см. на с. 25)


Тишков

ОХЛАЖДЕНИЕ СВЕТОМ

И. ВОРОБЬЕВ

Вам не показалось, что в сочетании этих слов — «охлаждение светом» — есть какая-то нелепость? В самом деле, в жаркий день мы ищем прохлады в тени, стараясь укрыться от солнца. А тут — охлаждать вещество, облучая его светом? Ведь для понижения температуры нужно отнимать энергию, а свет ее приносит. Тем не менее световая холодильная установка создана, и с ее помощью достигнута весьма низкая температура в $2{,}4\cdot10^{-4}$ К.

Попробуем и мы отыскать способ «производить холод» светом.

Команда атомов и команда фотонов

Прежде всего вспомним, что температура связана со средней кинетической энергией теплового движения атомов:

$$\frac{3}{2}kT=\frac{\overline{mv^2}}{2}. \qquad (1)$$

Чтобы она понизилась, достаточно замедлить атомы. Почему бы для торможения не использовать фотоны? Фотон, как известно, обладает импульсом $p_ф=\varepsilon/c$, где ε — энергия фотона, c — его скорость, т. е. скорость света. Если летящий атом поглотит встречный фотон, то он, атом, затормозится. Но как «попасть» фотоном в летящий атом?

Понятно, что нет смысла «целиться» в отдельный атом, надо столкнуть «в лоб» пучок атомов с пучком фотонов. В качестве источника тормозящего света, естественно, надо использовать лазер. Он испускает остронаправленный поток фотонов одной и той же энергии. Чтобы получить направленный пучок атомов, сделаем следующее. Испарим в вакуумной камере крупинку вещества (электрическим разрядом или световым импульсом лазера). Две перегородки с малыми отверстиями выделят из разлетающегося облачка пара тонкий пучок. Так мы получим команду атомов, летящую навстречу лазерному лучу (рис. 1).

Прекрасно, контуры холодильной установки начинают вырисовываться. Но будет ли свет поглощаться сравнительно разреженным пучком? (Ведь газы, как правило, исключительно прозрачны. А это и означает, что фотоны пролетают сквозь толщу газа, практически не сталкиваясь с его атомами.) И если будет, то обязательно ли в этом процессе атом затормозится, потеряет часть своей энергии?

Примечательно, что оба эти вопроса тесно связаны.

Уровни возможной внутренней энергии атома образуют лестницу с пустыми промежутками между ступенями (рис. 2). От основного состояния с наименьшей внутренней энер-

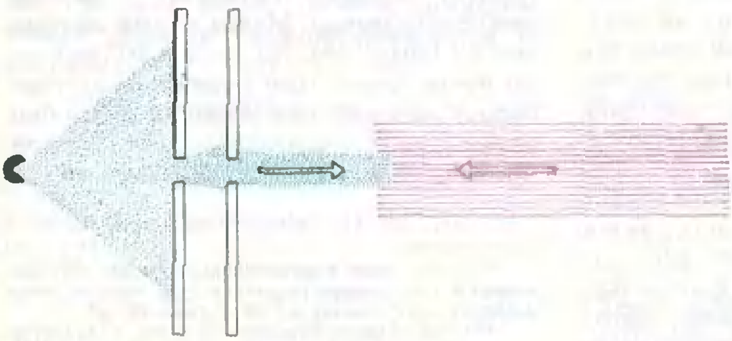


Рис. 1.

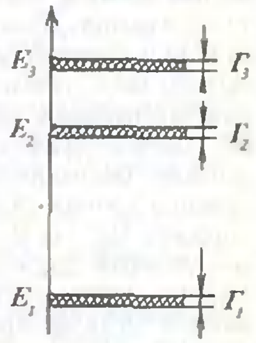


Рис. 2.

гией первое возбужденное состояние отделено энергией E_1, второе — E_2 и т. д. Сами ступени имеют некоторую толщину: у множества атомов в данном возбужденном состоянии встречаются энергии от $E-\Gamma/2$ до $E+\Gamma/2$, где величина Γ называется шириной уровня с энергией E. Вероятность встретить атом за пределами ширины уровня мала и резко убывает с ростом отклонения от середины ступени.

Между энергией атома и энергией поглощаемого фотона существует четкое соответствие: атом может поглотить только такой фотон, энергия которого отвечает переходу с одной ступеньки на другую. Такой резонансный характер поглощения и объясняет, в основном, высокую прозрачность газов — если энергия фотона отличается от энергии перехода больше, чем на ширину уровня, поглощение резко ослабляется и сходит на нет.

Итак, при специальном выборе энергии фотонов происходит поглощение с переходом атомов из одного состояния в другое, в котором внутренняя энергия больше. Из-за толчка при поглощении встречного фотона атом замедлится, уменьшится и его кинетическая энергия. Но это не противоречит закону сохранения энергии. В этом случае часть кинетической энергии атома и энергия фотона идут на прирост внутренней энергии атома. Совместное рассмотрение балансов импульса и энергии при взаимодействии атомов и фотонов и позволит разобраться в возможностях светового охлаждения.

Отложим пока расчеты. Подумаем вот о чем. Вряд ли однократное поглощение в точности погасит скорость атомов. Поэтому важна их судьба и после поглощения. Атом стабилен сам по себе лишь в основном состоянии, на низшем энергетическом уровне. Время жизни атома в возбужденном состоянии ограничено. Для первого уровня типичное время жизни порядка 10^{-8} с. В среднем через такое время атом перейдет в основное состояние, испустив при этом фотон. Как влияет отдача при излучении фотона на движение атома? Не скомпенсирует ли она торможение на этапе поглощения? Не приведет ли к вылету атома из пучка и лазерного луча? Это требует количественных оценок.

Переизлученные фотоны тоже могут быть поглощены атомами — для них тоже выполнены условия резонанса. Но число этих «вторичных» фотонов много меньше числа фотонов в интенсивном лазерном луче. Кроме того, они излучаются атомами в самых разных направлениях и бóльшая их часть быстро покидает атомный пучок. Так что поглощением переизлученных фотонов можно пренебречь.

Резонансным поглощением и излучением мыслимые процессы не исчерпываются. Фотон высокой энергии может выбить электрон из атома; возможно рассеяние, когда происходит поглощение и излучение фотона в одном акте взаимодействия (при упругом рассеянии — без перехода с уровня на уровень, при неупругом — с изменением внутренней энергии); возможно двухфотонное поглощение и т. д. Однако эти возможные процессы или происходят со значительно меньшей вероятностью, или же от них можно «отстроиться» выбором диапазона энергии фотонов.

Настройка в резонанс

Реальный эксперимент проводился с натрием. Остановимся на переходе из основного состояния в первое возбужденное с внутренней энергией $E=2{,}1$ эВ *) и шириной уровня $\Gamma=4{,}4\cdot10^{-8}$ эВ. Столь узкий резонанс требует высокой точности в выборе энергии фотонов. Масса атома натрия $m=22$ ГэВ$/c^2$**), где $c=3\cdot10^8$ м/с — скорость света. При пересчете от температуры в энергию и наоборот удобно округленное значение постоянной Больцмана $k\approx10^{-4}$ эВ/К (более точно

*) 1 эВ — один электронвольт — равен энергии, которую приобретает электрон при прохождении разности потенциалов в 1 В; 1 ГэВ$=10^9$ эВ.

**) ГэВ$/c^2$ имеет размерность массы и служит ее единицей.

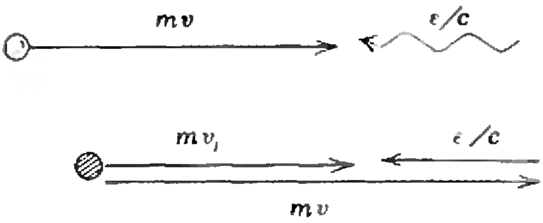


Рис. 3.

энергии в 1 эВ соответствует 11600 К). Температуре 10^3 К отвечает скорость теплового движения атомов натрия, примерно равная 10^3 м/с, а температуре 10^{-3} К — скорость 1 м/с. Порядок существенных величин примерно тот же и для других атомов.

Рассмотрим условия резонансного поглощения при «лобовом» столкновении атома, движущегося со скоростью v, и фотона с некоторой энергией ε (рис. 3). По закону сохранения импульса

$$mv_1 = mv - \varepsilon/c,$$

где v_1 — скорость атома после поглощения фотона. Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv_1^2}{2} + E = \varepsilon + \frac{mv^2}{2}.$$

Решение этих уравнений дает энергию фотона ε, обеспечивающую резонансное поглощение, и скорость атома v_1 после поглощения.

При температуре порядка 10^3 К, необходимой для испарения натрия, скорости атомов много меньше световой. Разумно использовать малость v и v_1 в сравнении с c и найти приближенное решение с устраивающей нас точностью. Для этого сначала запишем иначе условия баланса импульса и энергии:

$$\varepsilon = mc(v - v_1), \qquad (2)$$

$$E - \varepsilon = \frac{m(v^2 - v_1^2)}{2}, \qquad (3)$$

и поделим уравнение (3) на уравнение (2):

$$\frac{E-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{v+v_1}{2c}. \qquad (4)$$

Относительное отличие энергии фотона от энергии возбуждения оказывается малой величиной. Пренебрегая этим отличием, в первом приближении имеем:

$$\varepsilon \approx E, \qquad (5)$$
$$v - v_1 \approx E/mc \approx 3 \cdot 10^{-2}\ \text{м/с}.$$

Разность скоростей получена заменой в (2) ε на немного большую величину E, так что точное значение разности еще чуть меньше.

В следующем приближении воспользуемся малостью разности скоростей по сравнению с самими скоростями и заменим в (4) v_1 на v; тогда

$$\frac{E-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{v}{c}. \qquad (6)$$

Учет разницы скоростей приведет к сдвигу энергии ε на величину, много меньшую ширины уровня Γ, и потому для нас несуществен — он не повлияет на условие резонанса. По той же причине в выражении (6) допустима замена в знаменателе ε на E, так что

$$E - \varepsilon = E\frac{v}{c} \qquad (7)$$

с устраивающей нас точностью.

Итак, найдено условие интенсивного поглощения встречных фотонов: их энергия должна быть меньше энергии уровня на долю, равную отношению скорости атома к скорости света. Удручает, правда, ничтожное уменьшение скорости на 3 см/с. Разовое торможение фактически ничего не дает.

Надо иметь в виду и то, что скорости атомов в пучке разные, поэтому в резонанс попадает лишь часть атомов. В самом деле, согласно (7) для верхней и нижней границы уровня имеем

$$E \pm \frac{\Gamma}{2} - \varepsilon = E\frac{V_\pm}{c},$$

где $V_\pm$ — граничные скорости, отвечающие попаданию в резонанс при заданной энергии фотона. Ширина диапазона скорости

$$\Delta V = V_+ - V_- = c\frac{\Gamma}{E} \approx 6\ \text{м/с}. \qquad (8)$$

Атомы, скорости которых лежат вне этого диапазона, не будут тормозиться.

Переизлучение и подстройка резонанса

Однократного торможения при поглощении недостаточно. Однако, прожив короткое время в возбужденном состоянии, атом возвращается в основное состояние, испустив фотон, и после этого, надеемся, снова готов к поглощению. Поэтому рассмотрим излучение фотонов *возбужденными* атомами при возвращении их в основное состояние.

Лазерные фотоны летят туда, куда мы их направим. Направление же вылета излучаемых фотонов меняется от случая к случаю. От угла θ между скоростью возбужденного атома v и направлением вылета испущенного фотона (*рис. 4*) зависят и изменение скорости атома при отдаче, и энергия вылетевшего фотона ε'. По закону сохранения энергии

$$\frac{m(v_1')^2}{2}+\varepsilon'=\frac{mv_1^2}{2}+E,$$

где v_1' — скорость атома после излучения. Закон сохранения *импульса* необходимо записать в векторном виде:

$$\overrightarrow{mv_1'}+\vec{p}\,'=\overrightarrow{mv_1}.$$

Ясно, что при вылете фотона «вбок» направление движения атома изменится на некоторый угол φ.

Применим опять приближенный расчет. В первом приближении $\varepsilon'=E$. Так как E/c много меньше mv_1, то снова v_1 и v_1' весьма близки, а угол φ весьма мал. Радиусом mv_1' сделаем засечку на отрезке mv_1 (см. рис. 4). Малую дугу окружности можно считать прямолинейным отрезком, перпендикулярным отрезку mv. Поэтому из рассмотрения маленького прямоугольного треугольника имеем для длины этой дуги выражение $E\sin\theta/c$. Тогда угол, на который отклонится от направления движения атом, испустивший фотон, —

$$\varphi=\frac{E\sin\theta}{mvc},\qquad(9)$$

а изменение скорости атома —

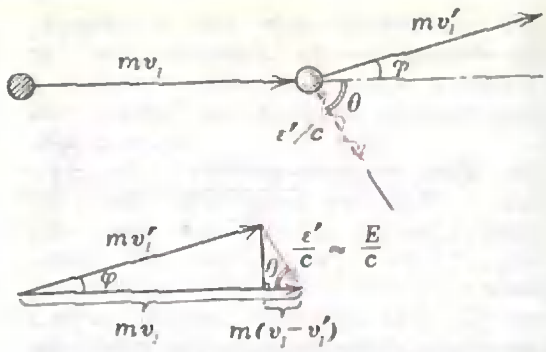


Рис. 4.

$$v_1-v_1'=\frac{E\cos\theta}{mc}.\qquad(10)$$

В следующем приближении (пренебрегаем v_1-v_1' по сравнению с v_1 и v_1') получим разность энергии излученного фотона и энергии уровня:

$$\varepsilon'-E=\frac{Ev_1\cos\theta}{c}.$$

Совпадение ε' и ε имеет место лишь при излучении фотона назад, при $\theta=\pi$ (см. (7)). *Лишь в этом единственном случае отдача при излучении точно компенсирует торможение при поглощении.* (Убедитесь, что это точный результат, а не приближенный.)

В каждом индивидуальном акте излучения изменение скорости атома зависит от угла вылета фотона и, согласно (10), находится в пределах от $-E/mc$ до $E/mc\approx3$ см/с. Из-за случайности угла вылета среднее значение *изменения скорости* при излучении можно считать нулевым.

Наибольший угол отклонения скорости атома при излучении, согласно (9), составляет

$$\varphi_{\max}=\frac{E}{mv_1c}.$$

При скорости порядка 10^3 м/с это примерно $3\cdot10^{-5}$ рад, а при скорости 10 м/с — примерно $3\cdot10^{-3}$ рад.

На первых порах десятки и даже сотни циклов «поглощение — излучение» не уведут атом из области резонанса. Изменения скоростей за цикл малы, отклонения направлений скоростей малы и случайны, и «суммарное» угловое отклонение атомного пучка накапливается очень медленно.

Но это до поры до времени. После уменьшения скорости на $\Delta V = c\frac{\Gamma}{E} = 6$ м/с (см. (8)) резонанс прекратится. Для дальнейшего торможения становится необходима подстройка. Анализируя *условие резонанса* (6), можно предложить два способа подстройки.

Первый способ состоит в плавном увеличении энергии фотонов ε в соответствии с уменьшением скорости атомов. Для этого нужен лазер с изменяемой энергией излучаемых им фотонов. Такие лазеры есть.

Второй способ состоит в воздействии на саму энергию E. В частности, уровни энергии немного меняются во внешнем магнитном поле. В постоянном по времени поле, *плавно меняющемся* по оси пучка, для атома с любой скоростью найдется место с подходящим *значением поля*. Оба способа действительно осуществлены.

Рассмотрим подробнее первый способ. Выберем начальную энергию фотонов такой, чтобы она отвечала резонансу при скорости V, превышающей, допустим, скорости 90 % атомов пучка. Начнем плавно увеличивать энергию фотонов вплоть до значения, равного энергии уровня E, отвечающего резонансу с *почти неподвижными* атомами.

Сначала тормозятся атомы в диапазоне скоростей от $V - \frac{1}{2}c\frac{\Gamma}{E}$ до $V + \frac{1}{2}c\frac{\Gamma}{E}$. За счет замедления атомов этот диапазон постепенно почти опустеет — скорости почти всех атомов станут заведомо меньше V.

При увеличении энергии фотонов затормозившиеся атомы снова окажутся в резонансе, но к ним добавятся атомы пучка, исходно *имевшие подходящую* скорость. Таким образом, все атомы со скоростями меньше V *дождутся прихода резонанса*, когда начнется их торможение.

Оценим время торможения от скорости V до почти нулевой скорости. Число циклов «поглощение — излучение» за это время равно $N = V/(E/mc)$

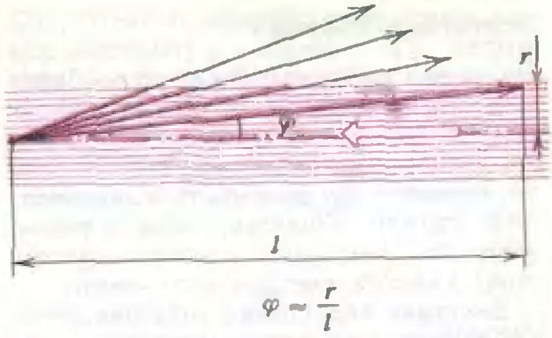


Рис. 5.

(E/mc — уменьшение скорости в акте поглощения (см. (5)); изменением скорости при испускании возбужденным атомом фотона мы пренебрегаем.) Продолжительность цикла Δt определяется временем жизни τ в возбужденном состоянии, так как при большой интенсивности лазерного луча поглощение происходит быстро. Таким образом, полное время торможения —

$$t = N\cdot\Delta t = N\tau = \frac{mcV}{E}\tau.$$

При начальной скорости $V = 3\cdot10^3$ м/с $t = 10^{-3}$ с. (Напомним, что в эксперименте, проводившемся с натрием, $m = 22$ ГэВ/c^2, $E = 2{,}1$ эВ.)

Расстояние, на котором происходит торможение, оценивается величиной $l = Vt/2 \approx 1$ м. Это расстояние существенно не только для выбора размеров вакуумной камеры. Диаметр лазерного луча ограничен. Заметное угловое отклонение скоростей от оси пучка атомов приводит к уходу атомов из тормозящего луча (рис. 5). При диаметре луча порядка одного-двух сантиметров на метровой длине достаточно отклонения порядка 10^{-2} рад. *Такого порядка* отклонения достигаются при отдаче из-за излучения «вбок» для атомов со скоростями 10—3 м/с. Почти полной потерей атомов в этом случае и ограничиваются возможности «однолучевого» торможения. Указанным выше скоростям отвечает диапазон температур от 0,1 до 0,01 К. Полученная в действительности температура 0,05 К согласуется с нашими грубыми прикидками.

Ловушка в ловушке

Даже медленные атомы из-за разброса скоростей и направлений движения сравнительно быстро разбредутся. «Сверххолодные» атомы нужно как-то собирать и удерживать в компактной группе. Ловушку для атомов, даже две ловушки — одна в другой, тоже удалось построить из света.

Внешняя «большая» ловушка, обеспечивающая и дополнительное охлаждение, это своего рода развитие тормозящего луча. Она образована пересечением шести лазерных лучей с энергией фотонов $\varepsilon_0 = E - \frac{\Gamma}{2}$, соответствующей нижней границе уровня (рис. 6).

Закон сохранения энергии при поглощении в данном случае приводит к равенству:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\Gamma}{2} = \frac{mv_1^2}{2}.$$

При кинетической энергии атома $\frac{mv^2}{2} > \frac{\Gamma}{2}$ возможно поглощение «тормозящего» фотона, но не происходит поглощения «разгоняющего». Ибо для того чтобы атом, поглотивший фотон, мог поглотить фотон, летящий вдогонку, этот фотон должен иметь энергию хотя бы чуть выше нижней границы уровня. Атом поэтому будет замедляться, направление же его скорости при поглощении и излучении будет меняться достаточно заметно. Это приведет к весьма запутанной траектории и, в результате, к довольно продолжительному блужданию атомов в области пересечения шести лучей. На практике для области объемом несколько кубических сантиметров время задержки составляло примерно 0,5 с. Этого более чем достаточно, чтобы у многих атомов кинетическая энергия стала меньше или сравнялась с полушириной уровня.

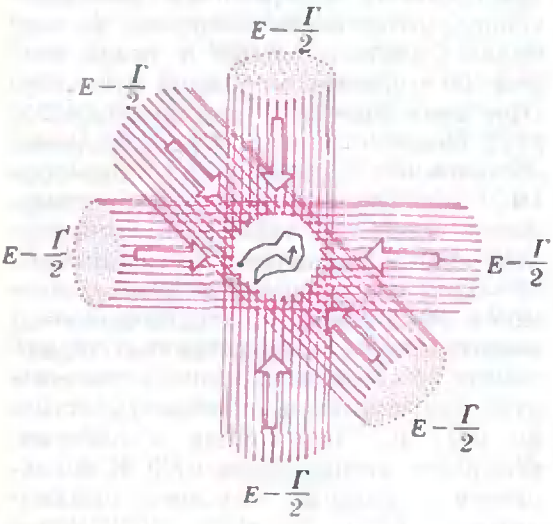


Рис. 6.

Понятно, что когда в процессе торможения энергия атома становится меньше $\Gamma/2$, поглощение прекращается. Таким образом, предельная температура определяется шириной уровня: $T_{\text{пр}} = \Gamma/2k$ (см. (1)). Фактически достигнутая температура $2{,}4 \times 10^{-4}$ К почти не отличается от предельной.

Шестилучевая ловушка получила название «ловушка из патоки». В сущности она неспособна удержать атомы надолго. Они покидают ее при блужданиях и заведомо покинут, затормозившись до энергии $\Gamma/2$ или до скорости около 0,5 м/с. Поэтому и нужна дополнительная «настоящая» ловушка.

Нужно создать внутри «ловушки из патоки» маленькую ямку, в которую бы скатывались замедлившиеся атомы. Но здесь для убедительного элементарного рассмотрения понадобилось бы слишком обширное отступление. Поэтому просто сообщу, что такой ямкой служит область объемом около 10^{-9} см^3 вблизи фокуса еще одного лазерного луча с энергией фотонов, заметно меньшей резонансной энергии. Двигая линзу, можно перемещать фокус и транспортировать захваченные в его окрестности атомы.

Энергетическая глубина ямки составляет в температурных единицах всего $5 \cdot 10^{-3}$ К. Поэтому столкновение с атомами остаточных газов при температуре 300 К буквально вышвыривает атом натрия из ямки вблизи фокуса. При достигнутом качестве вакуума время удержания составляет примерно 10 с.

* * *

История создания световой холодильной установки охватывает время начиная с 1968 года, когда была всерьез предложена ловушка в фокусе лазерного луча, до 1986 года, когда удалось поймать в нее и удержать несколько секунд 500 атомов натрия. Современные возможности «дают нам поразительную власть над атомами» — так выразился один из создателей установки Стивен Чу. Думается, что атомы и фотоны представят нам еще не раз случай изобрести и осуществить что-нибудь не менее красивое.

О НЬЮТОНОВСКОМ ПРИТЯЖЕНИИ ЭЛЛИПСОИДОВ

Б. ШАПИРО

От редакции.

В этой математической статье используются понятия, хорошо знакомые вам из курса физики: сила, потенциал, эквипотенциальная поверхность... Конечно, всем им можно дать точное математическое определение. Но и без этого их наглядный смысл вполне ясен. На всякий случай напомним несколько фактов: сила (и потенциал), которую создают несколько масс (или зарядов), равна сумме сил (и потенциалов), созданных каждой из них; если в некоторой области пространства потенциал равен константе, то силовое поле равно нулю; эквипотенциальная поверхность — это поверхность, потенциал всех точек которой равен некоторой константе; вектор силы в каждой точке такой поверхности перпендикулярен ей. Наконец, автор свободно пользуется (в духе Ньютона!) понятиями бесконечно малых углов, площадей, объемов и т. п.

Ньютон о притяжении однородной сферы

Свои основные математические достижения Исаак Ньютон опубликовал в 1687 году в «Математических началах натуральной философии». На протяжении этого трактата он многократно возвращается к теории притяжения неподвижных и вращающихся тел и вопросу о форме земной поверхности. Среди прочего Ньютон приводит элегантное доказательство следующего факта.

Теорема XXX из отдела XIII «О притягательных силах сферических тел»:

«Если к отдельным точкам сферической поверхности направлены равные центростремительные силы, убывающие в отношении квадратов расстояний, то частица, помещенная внутри этой поверхности, от таких сил ни в какую сторону притяжения не испытывает».

Другими словами, однородная материальная сфера не притягивает внутренние точки.

Ньютон рассуждает так. Пусть P — произвольная точка внутри сферы (рис. 1). Возьмем маленький телесный угол с центром P и покажем, что силы, с которыми действуют на P две бесконечно малые части поверхности, высекаемые на ней углом, взаимно уничтожаются. Действительно, сила, с которой действует на P каждая из частей, пропорциональна массе части, т. е. ее площади, и обратно пропорциональна квадрату расстояния до точки P. Основания бесконечно узких конусов с вершиной P можно считать плоскими. Как видно из рисунка 1, на котором изображено сечение сферы плоскостью, проходящей через ее центр O и ось конусов, эта ось составляет с основаниями равные углы. Следовательно, конусы подобны, и отношение площадей их оснований равно отношению квадратов длин их осей. Поэтому силы притяжения двух рассматриваемых частей взаимно уничтожаются. Ньютон заключает:

«Из этого рассуждения следует, что притяжение всей сферической поверхности, как состоящее из противоположных элементов, уничтожается; следовательно, P ни в какую сторону этим притяжением к движению не побуждается».

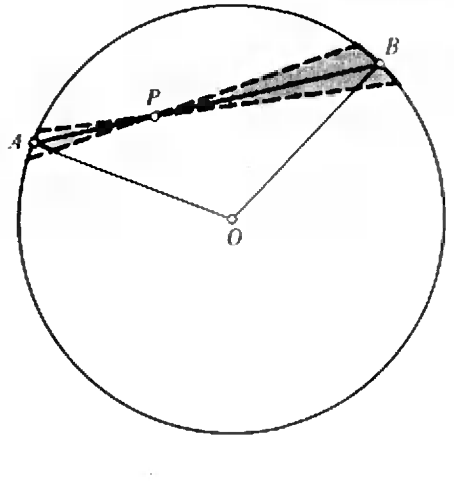


Рис. 1.

Сделаем два замечания по поводу этого поучительного рассуждения. Во-первых, оно годится и для однородного шарового слоя, который можно представлять себе состоящим из бесконечного числа материальных сфер. Во-вторых, массу можно заменить на электрический заряд, поскольку кулоновская сила тоже обратно пропорциональна квадрату расстояния. Значит, однородная заряженная сфера не создает внутри себя электрического поля.

Поле притяжения однородной сферы во внешней области

Выяснив, каким будет гравитационное поле внутри однородной сферы, Ньютон заинтересовался вопросом, какую силу притяжения создает сфера во внешней области пространства. В силу симметрии задачи эта сила будет зависеть лишь от расстояния до центра сферы (и, конечно, от ее массы). Но как именно?

Забудем на время, что мы изучаем силы притяжения, и поговорим о течении жидкости. Представим себе, что в начале координат расположен источник, из которого по радиусам сферически симметрично растекается несжимаемая жидкость. В силу несжимаемости через каждую сферу с центром в источнике за единицу времени протекает одинаковое количество жидкости. Это количество пропорционально площади сферы, т. е. квадрату ее радиуса, и пропорционально скорости жидкости. Значит, скорость течения обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника.

Мы сделали важное наблюдение: поле скоростей сферически-однородной несжимаемой жидкости — такое же, как силовое поле точечной массы (или электрического заряда). Это означает, что силовое поле точечной массы обладает свойством несжимаемости: величина его потока через границу любой области, не содержащей массу, равна нулю — сколько втекает, столько и вытекает. То же верно и для любого распределения масс (и зарядов), ибо сила, которую создают несколько масс, равна сумме сил, созданных каждой из них. Теперь мы в состоянии доказать следующую теорему:

сила притяжения однородной сферы массой M совпадает с силой, создаваемой точечной массой M, помещенной в центр сферы.

Действительно, как мы уже установили, силовое поле сферы сферически-симметрично и несжимаемо. Но мы знаем, что единственное радиальное поле скоростей несжимаемой жидкости обратно пропорционально квадрату расстояния до центра, т. е. совпадает с полем точечной массы. Что эта масса совпадает с массой сферы, следует из сравнения потоков через поверхности, охватывающие данную сферу.

На этом исследование притяжения однородной сферы завершено. Если бы мы попытались вычислять силы прямо, т. е. интегрируя вклады бесконечно малых кусочков поверхности, то наверняка встретились бы с большими трудностями. Теперь наша задача — обобщить полученные результаты на более сложные поверхности.

О свободном распределении зарядов

Свободное распределение зарядов на замкнутой проводящей поверхности — это такое распределение, которое получается, если предоставить заряду возможность распределяться самостоятельно в отсутствие внешних сил. Например, на сфере такое распределение будет однородным. Свободное распределение обладает двумя важными свойствами.

Всякая поверхность является эквипотенциальной для свободного распределения зарядов на ней.

Это очевидно: разность потенциалов на поверхности привела бы к перераспределению зарядов на ней.

Силовое поле свободного распределения зарядов внутри замкнутой поверхности равно нулю (а потенциал равен константе).

Действительно, пусть потенциал, равный некоторой константе на поверхности, отличен от этой константы во внутренней области. Тогда в некоторой точке P он достигает минимального или максимального значения. Рассмотрим маленькую эквипотенциальную поверхность, окружающую эту точку. Силовые линии протыкают ее и сходятся в точке P, что противоречит несжимаемости потока. Итак, потенциал равен константе, а силовое поле — нулю.

Как видите, теорема Ньютона о том, что свободное распределение зарядов на сфере не создает внутри нее силовое поле, обобщается на произвольные поверхности. Теперь мы займемся явным видом свободного распределения для поверхностей, следующих по сложности за сферой — для эллипсоидов.

О гомеоидах

Эллипсоидом называется поверхность, полученная из сферы растяжением или сжатием вдоль трех перпендикулярных осей с тремя, вообще говоря, различными коэффициентами. То, что получается при описанном растяжении из шарового слоя, называется *гомеоидом* (рис. 2). Ограничивающие гомеоид поверхности эллипсоидов гомотетичны, причем центр гомотетии совпадает с их общим центром.

Попробуем вычислить притяжение бесконечно тонкого гомеоида в какой-нибудь внутренней точке P. Вы, наверное, догадались, что это притяжение окажется равным нулю; и чтобы доказать это, нужно убедиться, что силы притяжения двух бесконечно малых пирамид, заштрихованных на рисунке 2, взаимно уничтожаются. Эти силы пропорциональны массам (т. е. объемам) пирамид и обратно пропорциональны квадратам расстояний до точки P. Объем заштрихованной бесконечно малой пирамиды можно вычислить как произведение площади S перпендикулярного сечения бесконечно малого телесного угла на длину h отрезка оси этого угла, заключенного в гомеоиде. Площадь S пропорциональна квадрату расстояния r, поэтому сила притяжения правой пирамиды на рисунке 2 пропорциональна $r^2h/r^2=h$. Аналогично, сила притяжения левой пирамиды пропорциональна H. Остается заметить, что $h=H$ — ведь соответствующие отрезки лежат на одной прямой и длины их прообразов в шаровом слое одинаковы (рис. 3). Итак, мы доказали следующую теорему Ньютона:

сила притяжения однородного бесконечно тонкого гомеоида в любой его внутренней точке равна нулю.

(Отсюда, как и в случае сферы, следует, что равно нулю и притяжение настоящего «толстого» гомеоида.)

Как мы уже знаем, свободное распределение зарядов — это такое распределение, которое создает в любой внутренней точке нулевое поле. С другой стороны, поскольку ограничивающие гомеоид поверхности гомотетичны, его толщина в любой точке пропорциональна длине радиуса-вектора, проведенного из центра в эту точку. Соединяя эти два замечания, мы приходим к описанию свободного распределения зарядов на эллипсоиде:

плотность свободного распределения зарядов в каждой точке пропорциональна длине радиуса-вектора, проведенного в эту точку из центра эллипсоида.

Теорема Арнольда

Для того чтобы обобщить теорему о гомеоиде, нам придется немного повозиться с формулами. Вспомним, что эллипсоид получается растяжением сферы вдоль трех осей коор-

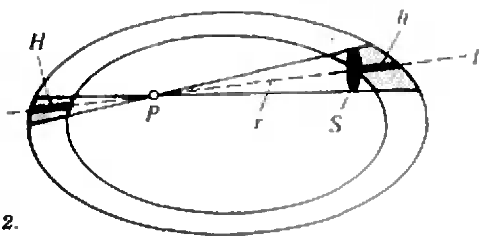


Рис. 2.

динат. Пусть a, b и c — коэффициенты растяжения, т. е. при растяжении координата x превращается в ax, y — в by, а z — в cz. При этом уравнение единичной сферы

$$x^2+y^2+z^2=1$$

превратится в уравнение эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(подумайте: почему a, b и c попали в знаменатель?). При гомотетии координаты x, y и z умножаются на одно и то же число; поэтому уравнением близкой гомотетичной поверхности будет

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\varepsilon$$

(а коэффициент гомотетии равен $\sqrt{1+\varepsilon}$). Итак, плотность свободного распределения зарядов на поверхности *эллипсоида M, заданного* уравнением

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

пропорциональна расстоянию до бесконечно близкой поверхности M_ε, заданной уравнением

$$f(x,y,z)=1+\varepsilon.$$

Теперь мы совершим прыжок в 300 лет и из времени Ньютона перенесемся в наши дни. Рассмотрим поверхность N, заданную уравнением

$$f(x,y,z)=0,$$

где f — некоторый многочлен n-й степени от трех переменных. Распределим на N заряд с плотностью, пропорциональной расстоянию от N до *бесконечно* близкой поверхности N_ε, заданной уравнением

$$f(x,y,z)=\varepsilon.$$

Мы собираемся доказать, что такая заряженная поверхность *не притягивает* свои внутренние точки. Только какие точки называть внутренними?

Посмотрим на рисунок 3, на котором изображена поверхность, заданная некоторым многочленом 6-й степени. Точку R, конечно, нельзя считать внутренней; а как быть с точками Q_1, Q_2 или P? Дадим определение:

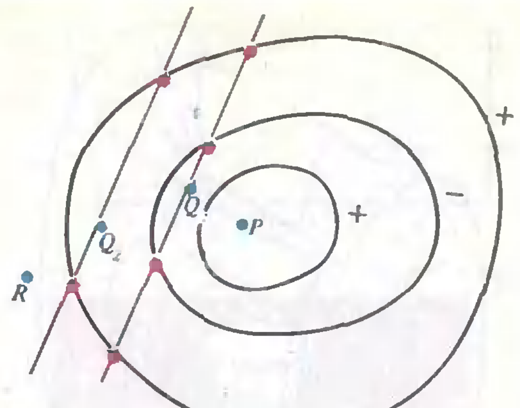


Рис. 3.

точка называется *внутренней* для поверхности N, если каждая проходящая через нее прямая пересекает N *ровно* в n точках (n — степень многочлена, задающего N)*). При таком определении ни точка R, ни точки Q_1 и Q_2 внутренними не являются, а точка P — внутренняя.

Теперь мы можем сформулировать теорему известного советского математика В. И. Арнольда:

заряженная поверхность N, заданная уравнением n-й степени $f(x, y, z)=0$, с плотностью заряда, пропорциональной расстоянию до бесконечно близкой поверхности N_ε, заданной уравнением $f(x,y,z)=\varepsilon$, не притягивает своих внутренних точек P. Знак заряда чередуется: положителен на ближайшем к P куске поверхности, отрицателен — на следующем и т. д. (рис. 3).

Теорема Арнольда доказывается аналогично теореме о гомеоиде. Возьмем бесконечно малый телесный угол с вершиной в P и осью l (см. снова рис. 2) и докажем, что силы притяжения высекаемых им на N бесконечно малых площадок взаимно уничтожаются. Заменим заряженную поверхность на бесконечно тонкий материальный слой между поверхностями N и N_ε (аналог гомеоида). Сила притяжения, создаваемая одной из пирамидок в точке P, пропорциональ-

*) Подумайте, почему точек пересечения заведомо не больше n. Бывают и такие многочлены, что соответствующие поверхности вообще не содержат внутренних (в смысле данного определения) точек.

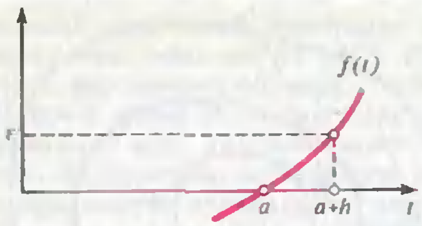


Рис. 4.

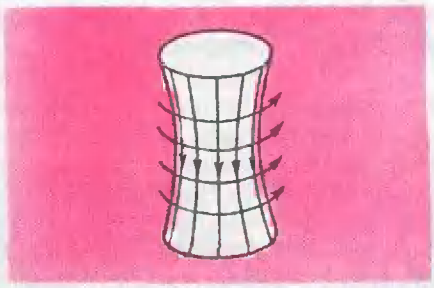


Рис. 5.

на $Sh/r^2 \sim h$. Поэтому достаточно доказать, что сумма длин отрезков (с учетом знаков!), высекаемых поверхностями N и N_ε на прямой l, равна нулю.

Но это утверждение относится уже не к трехмерному пространству, а к прямой l. Ограничив f на эту прямую, мы получим функцию одной переменной, которую будем по-прежнему обозначать через $f(t)$. Пусть a — одна из точек пересечения l и N. Тогда $f(a)=0$. Сейчас мы выразим длину h через ε. Посмотрите на рисунок 4:

$$f(a)=0 \text{ и } f(a+h)=\varepsilon.$$

По определению производной,

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\varepsilon-0}{h}=\frac{\varepsilon}{h}.$$

Поэтому $h=\varepsilon/f'(a)$ (точное равенство мы написали, т. к. и ε, и h бесконечно малы). Итак, нам нужно доказать, что

$$\frac{1}{f'(a_1)}+\frac{1}{f'(a_2)}+\ldots+\frac{1}{f'(a_n)}=0, \quad (1)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — точки пересечения l и N, т. е. корни многочлена $f(t)$.

Вспомним, что $f(t)$ — многочлен n-й степени, имеющий ровно n корней. Такой многочлен (с точностью до постоянного множителя) можно записать в виде

$$f(t)=(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_n),$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — его корни. Дифференцируя это равенство, получим:

$$f'(t)=(t-a_2)(t-a_3)\ldots(t-a_n)+$$
$$+(t-a_1)(t-a_3)\ldots(t-a_n)+\ldots+$$
$$+(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_{n-1}).$$

В частности,

$$f'(a_i)=(a_i-a_1)(a_i-a_2)\ldots$$
$$\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n).$$

Все слагаемые, кроме i-го, содержат множитель (a_i-a_i) и обращаются в ноль.

Мы видим, что равенство (1) эквивалентно тождеству:

$$\frac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}+$$
$$+\frac{1}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}=0. \quad (2)$$

Трудно поверить, но это тождество выполнено для любых попарно различных чисел $a_1, \ldots, a_n$. И доказывается оно поистине олимпиадным приемом!

Рассмотрим многочлен $(n-1)$-й степени:

$$g(t)=\frac{(t-a_2)(t-a_3)\ldots(t-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}+$$
$$+\frac{(t-a_1)(t-a_3)\ldots(t-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}.$$

При $t=a_i$ все слагаемые, кроме i-го, обращаются в ноль, а i-е — в 1. Поэтому

$$g(a_1)=g(a_2)=\ldots=g(a_n)=1.$$

Значит, многочлен $(n-1)$-й степени $g(t)-1$ имеет n корней, что возможно *только если* $g(t)-1=0$ для всех t. В частности, равен нулю старший член многочлена $g(t)$. Но это и есть правая часть тождества (2)! Тем самым это тождество, а вместе с ним и теорема Арнольда, доказаны.

Мы доказали теорему даже с «некоторым запасом». Действительно, нулю равен не только старший член многочлена $g(t)-1$, но и остальные его члены. Это наблюдение позволяет усилить доказанную теорему:

утверждение о равенстве нулю силы притяжения сохранится, если плотность заряда умножить на значение произвольного многочлена $\varphi(x, y, z)$ степени не выше $(n-2)$.

Существуют и другие современные обобщения теоремы Ньютона. Например, рассмотрим проводящий гиперболоид (см. статью Д. Фукса в «Кванте» № 12 за 1989 год). И приложим к нему на бесконечности некоторую разность потенциалов. Вдоль меридианов гиперболоида начнет течь электрический ток. Оказывается, что магнитное поле этого тока внутри гиперболоида равно нулю, а во внешней области направлено вдоль параллелей (рис. 5), причем величина этого поля явно вычисляется. Наоборот, существует единственный и явно вычисляемый поверхностный ток вдоль параллелей гиперболоида, магнитное поле которого во внешней области равно нулю, а внутри направлено вдоль меридианов.

К сожалению, мы не можем останавливаться на этом интересном сюжете, так как нас ожидает еще одно путешествие во времени: на этот раз — в 1809 год.

Поле однородного гомеоида во внешней области

Вернемся к однородному гомеоиду. Мы уже знаем, что он создает нулевое поле в своей внутренней области. А каким будет поле во внешней области пространства? Ответ на этот вопрос нашел в 1809 году шотландский механик и математик Джеймс Айвори. Ему удалось описать эквипотенциальные поверхности свободного распределения зарядов на эллипсоиде — оказалось, что это тоже эллипсоиды (в случае сферы эквипотенциалями, конечно, служат концентрические сферы).

Рассмотрим эллипсоид M, заданный уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (3)$$

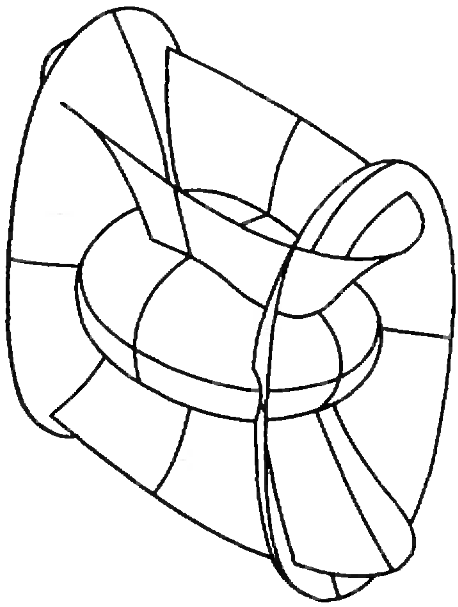


Рис. 6.

Софокусным эллипсоидом называется всякий эллипсоид M, заданный уравнением

$$\frac{x^2}{a^2+t}+\frac{y^2}{b^2+t}+\frac{z^2}{c^2+t}=1, \qquad (4)$$

где t — некоторое число ($t>-a^2$, $t>-b^2$, $t>-c^2$). Каждому t отвечает свой эллипсоид, причем при $t\neq s$ эллипсоиды M_t и M_s не пересекаются, а все семейство $\{M_t\}$ заполняет область пространства.

Название «софокусные эллипсоиды» подсказано аналогией с плоскостью. Эллипс M_d на плоскости можно задать как множество точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек — фокусов — равна некоторой постоянной d.

Иными словами, если закрепить в фокусах концы нити длины d, вставить в нить карандаш и натянуть ее, то карандаш вычертит эллипс M_d. При разных t мы получим разные эллипсы с фиксированными фокусами. Нетрудно убедиться (сделайте это!), что в подходящих координатах семейство софокусных эллипсов задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2+t}+\frac{y^2}{b^2+t}=1. \qquad (5)$$

Если же выбрать t так, что одно из

слагаемых в формуле (5) станет отрицательным, то уравнение (5) задаст уже не эллипс, а гиперболу, причем эта гипербола будет перпендикулярна всем эллипсам M_d. Аналогично, если в формуле (4) отрицательны одно или два слагаемых, то она задает семейство однополостных или двуполостных гиперболоидов, причем поверхности всех трех семейств будут попарно перпендикулярны (рис. 6).

Эллипсоид, как и эллипс, тоже можно задать с помощью нити фиксированной длины — рисунок 7.

Рассмотрим точки $P(x, y, z)$ и $P'(x', y', z')$, лежащие на эллипсоидах M и M_t. Один эллипсоид получается из другого растяжением в направлениях трех координатных осей. Точки P и P' называются *соответственными*, если при таком растяжении P переходит в P'. Иными словами,

$$\frac{x}{a}=\frac{x'}{a'},\ \frac{y}{b}=\frac{y'}{b'},\ \frac{z}{c}=\frac{z'}{c'},$$

где

$$(a')^2=a^2+t,\ (b')^2=b^2+t,\ (c')^2=c^2+t. \qquad (6)$$

Лемма Айвори. *Пусть P, P' и Q, Q' — две пары соответственных точек, лежащих на софокусных эллипсоидах: $P, Q \in M$, $P', Q' \in M_t$. Тогда $PQ'=P'Q$.*

Мне не удалось придумать геометрического доказательства этого утверждения, поэтому нам придется немного посчитать. Пусть координаты точек P и Q равны (x, y, z) и (u, v, w), а точек P' и Q' — $\left(\frac{a'}{a}x, \frac{b'}{b}y, \frac{c'}{c}z\right)$ и $\left(\frac{a'}{a}u, \frac{b'}{b}v, \frac{c'}{c}w\right)$. Тогда

$$|P'Q|^2=\left(\frac{a'}{a}x-u\right)^2+\left(\frac{b'}{b}y-v\right)^2+\left(\frac{c'}{c}z-w\right)^2=\left(\frac{a'}{a}\right)^2x^2+\left(\frac{b'}{b}\right)^2y^2+\left(\frac{c'}{c}\right)^2z^2+u^2+v^2+w^2\underline{-2\frac{a'}{a}xu-2\frac{b'}{b}yv-2\frac{c'}{c}zw}.$$

$$|PQ'|^2=\left(x-\frac{a'}{a}u\right)^2+\left(y-\frac{b'}{b}v\right)^2+\left(z-\frac{c'}{c}w\right)^2=x^2+y^2+z^2+\left(\frac{a'}{a}\right)^2u^2+\left(\frac{b'}{b}\right)^2v^2+\left(\frac{c'}{c}\right)^2w^2\underline{-2\frac{a'}{a}xu-2\frac{b'}{b}yv-2\frac{c'}{c}zw}.$$

Подчеркнутые слагаемые в обеих формулах одинаковы. Поэтому равенство $|P'Q|^2=|PQ'|^2$ равносильно равенству:

$$\left[\left(\frac{a'}{a}\right)^2-1\right]x^2+\left[\left(\frac{b'}{b}\right)^2-1\right]y^2+\left[\left(\frac{c'}{c}\right)^2-1\right]z^2=\left[\left(\frac{a'}{a}\right)^2-1\right]u^2+\left[\left(\frac{b'}{b}\right)^2-1\right]v^2+\left[\left(\frac{c'}{c}\right)^2-1\right]w^2.$$

Согласно формулам (6), это равенство равносильно уравнению

$$t\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=t\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\right),$$

которое выполняется, так как координаты точек P и Q удовлетворяют уравнению (3). Лемма Айвори доказана.

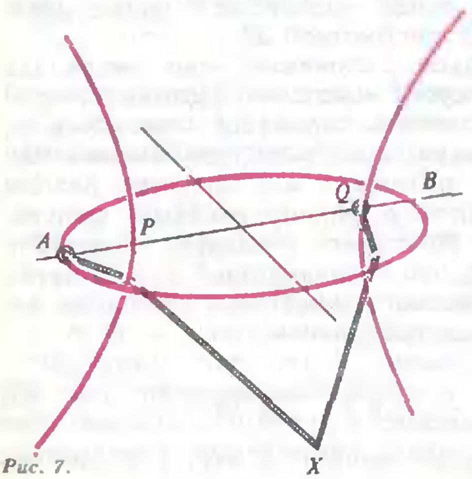


Рис. 7.

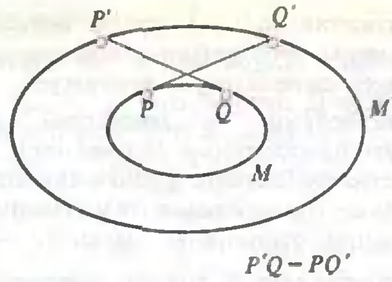


Рис. 8.

Вознаграждением за проделанную работу будет изящное доказательство теоремы Айвори об эквипотенциалях однородного гомеоида. Рассмотрим два бесконечно тонких однородных софокусных гомеоида M и M' равных объемов. Пусть P и P' — пара соответственных точек на них (рис. 8). Тогда

потенциал, создаваемый гомеоидом M' в точке P, равен потенциалу, создаваемому гомеоидом M в точке P'.

Действительно, рассмотрим бесконечно малый объем в точке Q' и равный ему объем в соответственной точке Q. По лемме Айвори, $PQ'=P'Q$. Значит, вклад элементарного объема, окружающего точку Q', в потенциал точки P равен вкладу элементарного объема, окружающего точку Q, в потенциал точки P'. Это верно для всех точек Q', что и доказывает наше утверждение.

Рассмотрим, наконец, бесконечно тонкий однородный гомеоид M. Потенциал, создаваемый им в произвольной точке P' любого софокусного эллипсоида M', равен потенциалу гомеоида M' в соответственной точке $P\in M$. Но по теореме Ньютона потенциал гомеоида M' во всех внутренних точках равен константе, так как не зависит от положения точки P. Поэтому потенциал гомеоида M в любой точке P' софокусного эллипсоида M' будет одним и тем же. Мы доказали теорему Айвори:

эквипотенциальными поверхностями свободного распределения зарядов на эллипсоиде служат софокусные ему эллипсоиды.

Заключение

Теория, о которой рассказано в статье, обобщается и на пространства произвольной размерности n. При этом гравитационные (и кулоновские) силы подчиняются обобщенному закону Ньютона:

$$f\sim r^{1-n},$$

где r — расстояние между притягивающимися частицами. Если вас заинтересовал мой рассказ, попробуйте сформулировать и доказать теоремы этой статьи в плоском мире, т. е. при $n=2$. Подумайте, в частности, каким будет свободное распределение зарядов на отрезке и каковы эквипотенциальные кривые такого распределения.

А еще советую вам прочитать замечательную книгу В. И. Арнольда «Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук» (М., «Наука», 1989).

Латинские прямоугольники

(Начало см. на с. 6)

приближенную формулу для числа «m-этажных» латинских прямоугольников длиной n:

$$L(m,\ n)\approx(n!)^m e^{-\frac{(m-1)m}{2}}.$$

Последняя формула дает тем меньшую относительную погрешность, чем больше n (такие формулы называются асимптотическими). Правда, Эрдеш и Капланский доказали это утверждение при одной существенной оговорке: «этажность» латинского прямоугольника не должна превышать полуторную степень логарифма его длины: $m<(\ln n)^{1,5}$. Однако впоследствии стало ясно, что оно верно и для бо́льших значений m. Японский математик К. Ямамото доказал, что для его справедливости достаточно предположить «лишь», что $m<\sqrt[3]{n}$. Слово «лишь» мы взяли в кавычки потому, что математикам очень бы хотелось найти если не точные, то хотя бы асимптотические формулы без всяких ограничений на соотношение длины и «этажности» латинских прямоугольников, и подобраться к латинским квадратам, уже сейчас находящим приложение в такой практической области математики, как теория планирования эксперимента (о которой, вероятно, «Квант» еще расскажет). Но решение этой задачи — дело будущего.

Задачник „Кванта"

Задачи

М1221—М1225, Ф1228—Ф1232

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 июля 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите «Задачник «Кванта» № 5 — 90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1221» или «Ф1228». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1221. Постройте треугольник по двум сторонам так, чтобы медиана, проведенная к третьей стороне, делила угол треугольника в отношении 1:2.

В. Чичин

М1222. Пусть $m>1$ — натуральное число, s — наибольшее целое число, для которого $2^s \leqslant m$. Докажите, что
а) для любых $s+1$ целых чисел можно выбрать несколько чисел и расставить знаки плюс и минус между ними так, что полученная сумма будет делиться на m.
б) оценка в пункте а) неулучшаема: существуют такие s целых чисел, что никакая сумма нескольких из них при любой расстановке знаков не делится на m.

В. Лев

М1223. На квадратный лист бумаги со стороной a посадили несколько клякс, площадь каждой из которых не больше 1. Докажите, что если каждая прямая, параллельная сторонам листа, пересекает не более одной кляксы, то суммарная площадь клякс не больше a.

А. Разборов

М1224. Из вершины треугольника проведен отрезок в точку на противоположной стороне, делящийся вписанной окружностью на три равные части. Может ли этот отрезок оказаться а) высотой; б) медианой; в) биссектрисой треугольника?

В. Сендеров

М1225*. Докажите, что
а) если для натуральных чисел a и b число $(a^2+b^2)/(ab-1)$ натуральное, то оно равно 5.
б) уравнение $x^2-5xy+y^2+5=0$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

С. Мамиконян, Г. Оганесян

Ф1228. Из стальной упругой тонкой ленты сделаны два обруча разных радиусов. При скольжении по горизонтальному столу обручи испытывают торможение силами вязкого трения, причем силы пропорциональны скоростям обручей и их поперечным размерам. Если толкнуть меньший обруч со скоростью v_0, он проедет до полной остановки путь L_0. Толкнем малый обруч так, чтобы он налетел на большой, имея перед ударом скорость v. На каком расстоянии друг от друга остановятся обручи?

А. Коршков

Ф1229. В стакан с водой опустили кипятильник, и вода начала понемногу нагреваться. График зависимости температуры воды от времени приведен на рисунке 1. По истечении трех минут кипятильник отключают от сети. Через какое время вода остынет до 50 градусов? до 30?

З. Рафаилов

Ф1230. Две удаленные друг от друга проводящие сферы, внешние радиусы которых R и $3R$, имеют толщи-

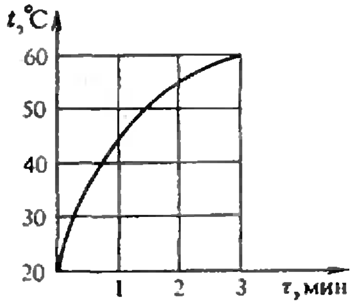


Рис. 1.

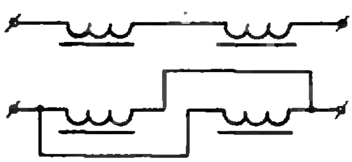


Рис. 2.

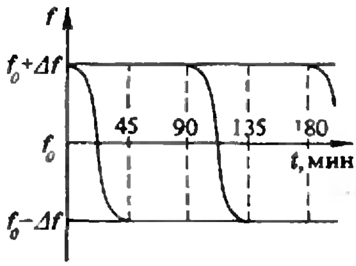


Рис. 3.

ну стенок $R/20$. В центры сфер помещены заряды Q и $2Q$. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы поменять местами эти заряды (в стенках для этой цели предусмотрены маленькие отверстия)?

В. Можаев

Ф1231. Две цилиндрические катушки с ферритовыми сердечниками помещены недалеко друг от друга и соединены последовательно. Индуктивность одной из них равна 1 мГн, другой — 2 мГн, а измеренная индуктивность катушек, соединенных последовательно, составила 3,6 мГн. Не меняя взаимного положения катушек, их переключают в параллель (рис. 2). Какую индуктивность мы измерим теперь?

А. Зильберман

Ф1232. На большом расстоянии от Земли находится планета ДВК-1, вокруг которой по круговой орбите вращается спутник БК-0010Ш. На спутнике установлена радиостанция, излучающая сигнал постоянной частоты. На Земле принимают этот сигнал, однако при этом возникают перерывы — 45 минут сигнал есть, потом 45 минут он отсутствует, потом опять 45 минут есть и т. д. Этим дело не ограничивается — частота принимаемого сигнала изменяется относительно среднего значения $f_0 = 1{,}5 \cdot 10^9$ Гц по закону, показанному на рисунке 3 ($\Delta f = 3 \cdot 10^4$ Гц). Считая, что отрезок Земля — планета лежит в плоскости орбиты, найдите массу ДВК-1.

М. Гаврилов

Решения задач
М1196—М1200, Ф1208—Ф1212

М1196. *Дано несколько (не менее двух) ненулевых чисел. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них числа $a+b/2$ и $b-a/2$. Докажите, что после нескольких таких операций нельзя получить исходный набор чисел.*

Проследим, как меняется при указанных операциях сумма квадратов всех чисел набора. Поскольку

$$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{5}{4}(a^2+b^2)\geqslant a^2+b^2,$$

каждый раз эта сумма увеличивается (или не меняется — причем лишь в случае $a=b=0$). По условию в самом начале числа не равны 0, поэтому уже на первом шаге сумма квадратов увеличится и в дальнейшем не может принять первоначальное значение.

Д. Фомин

М1197. *В треугольнике ABC точка M лежит на стороне AB, точка N — на стороне BC, O — точка пе-*

Решение основано на том, что выполнение равенств задачи эквивалентно существованию окружности, касающейся продолжений всех сторон четырехугольника $OMBN$.

ресечения отрезков CM и AN. Известно, что $AM+$ $+AN=CM+CN$. Докажите, что $AO+AB=CO+$ $+CB$.

Задачник «Кванта»

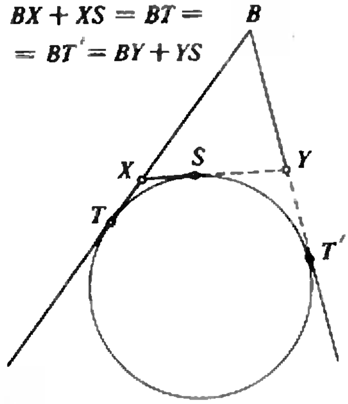


Рис. 1.

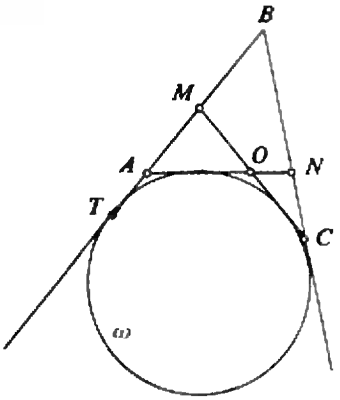


Рис. 2.

Докажем сначала следующую лемму: окружность, вписанная в угол XBY и касающаяся его сторон в точках T и T' будет вневписанной для треугольника XBY (рис. 1) тогда и только тогда, когда его периметр P_{XBY} равен $2BT$.

Если окружность касается прямой XY, то равенство $P_{XBY}=2BT$ сразу следует из теоремы о касательных, проведенных из одной точки (см. рис. 1). Обратно, если $P_{XBY}=2BT$, то вневписанная окружность треугольника XBY касается прямой BX в точке, находящейся от B на расстоянии $P_{XBY}/2$, т. е. в точке T, и, следовательно, совпадает с данной окружностью.

Пусть теперь известно, что $AM+AN=CM+CN$ (рис. 2). Тогда периметры треугольников ABN и MBC равны (их разность равна $(AB-BM)+AN-CM+$ $+(BN-BC)=AM+AN-CM-CN=0$). Поэтому вневписанная окружность ω треугольника ABN будет касаться и отрезка MC, а значит (см. рис. 2),

$$2MT=2BT-2BM=P_{BMC}-2BM=CB+CM-BM.$$

С другой стороны, ω является вневписанной окружностью и для треугольника AMO, следовательно,

$$2MT=P_{AMO}=OM+MA+AO.$$

Приравнивая нулю разность правых частей этих равенств, получим:

$$CB+(CM-OM)-(BM+MA)-AO=$$
$$=CB+CO-AB-AO=0,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается, что из второго равенства задачи следует первое и что оба они эквивалентны третьему равенству — $BM+OM=BN+ON$. Заметим, что и для существования «обычной» вписанной окружности четырехугольника $OMBN$ (рис. 2), кроме известного условия $OM+BN=ON+BM$, имеются еще два эквивалентных: $AM+MC=AN+NC$ и $AO+BC=CO+$ $+BA$; этот факт использовался в решении задачи М1025 («Квант», 1987, № 5, с. 26).

А. Меркурьев

М1198. *Назовем словом строчку из 10 цифр 0 и 1. Два слова будем считать синонимами, если одно можно получить из другого несколькими операциями следующего вида: из слова вычеркивается несколько подряд идущих цифр, сумма которых четна, и на их место вписываются те же цифры, но в обратном порядке. Каково*

О т в е т: 46 слов.

Заметим сначала, что если бы разрешалось переворачивать любой отрезок из нескольких цифр (а не только содержащий четное число единиц), то ответ был бы: 11 слов. В самом деле, любое слово из k единиц и $10-k$ нулей ($k=0, 1, \ldots, 10$) такими операциями не трудно превратить в слово

$$\underbrace{1\ldots1}_{k}\ \underbrace{0\ldots0}_{10-k}. \qquad (*)$$

(Если слово еще не приведено к виду (*), то переворачивая его отрезок 0...01, начинающийся с первого слева нуля и заканчивающийся первой после него еди-

максимальное число слов, среди которых нет синонимов?

ницей, мы увеличим число единиц в начале слова и за несколько таких шагов получим слово (*).)

Покажем, что в нашей задаче каждое слово приводится к виду

$$1...1\underbrace{0...0}_{a}1\underbrace{0...0}_{b} \qquad (**)$$

(или к слову из одних нулей). Если этот вид еще не достигнут, то выделим в слове отрезок 0...010...01 (или 0...011), начинающийся первым слева нулем и кончающийся второй после него единицей. Перевернув этот отрезок, мы увеличим число единиц в начале слова. Это можно делать, *пока справа от первого нуля остается* не менее двух единиц.

Число слов вида (**) равно количеству пар целых чисел (a, b), где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a+b \leqslant 9$, т. е. $1+2+...+9=45$ (рис. 1).

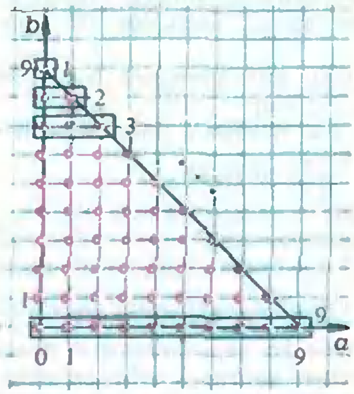


Рис. 1.

Остается доказать, что среди слов (**) нет синонимов. Для этого заметим, что при каждом переворачивании *сохраняется* число нулей, справа от которых стоит четное число единиц, и число нулей, предшествующих нечетному числу единиц (эти числа являются *инвариантами**) наших операций). Более того, если пометить любой из нулей исходного слова и подсчитать число стоящих за ним единиц до и после переворачивания, то окажется, что это число сохраняет четность: «четные» нули остаются «четными», а «нечетные» — «нечетными». Это очевидно для нулей, остающихся неподвижными. А для нуля на переворачиваемом отрезке это следует из того, что число единиц этого отрезка слева от выбранного нуля имеет ту же четность, *что и справа от него (рис. 2). Поскольку для слов* (**) указанные инварианты равны a (число «нечетных» нулей) и b (число «четных» нулей), такие слова при *разных a и b не могут быть синонимами.*

$$\ldots 0\ 0\ \underbrace{1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1}\ 0 \ldots$$
$$\downarrow$$
$$\ldots 0\ \overbrace{1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1}\ 0\ 0 \ldots$$

Рис. 2.

Д. Фомин

М1199. *Докажите, что если уравнение $ax^2+(c-b)x+(e-d)=0$ имеет корень, больший 1, то уравнение $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ имеет хотя бы один корень.*

Пусть корень уравнения $ax^2+(c-b)x+(e-d)=0$ равен $x=t^2$, где $t>0$; тогда

$$at^4+ct^2+e=bt^2+d.$$

Положим $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Из предыдущего равенства следует, что числа

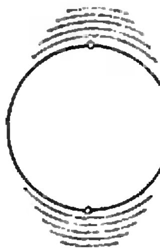
$$f(t)=(at^4+ct^2+e)+t(bt^2+d),$$
$$f(-t)=(at^4+ct^2+e)-t(bt^2+d)$$

имеют разные знаки (поскольку $t>1$, знак определяет второе слагаемое — большее по модулю). Поэтому на отрезке $[-t, t]$ уравнение $f(x)=0$ должно иметь корень. (Мы пользуемся здесь тем, что непрерывная функция, принимающая в концах отрезка значения разных знаков, должна в некоторой точке обращаться в нуль.)

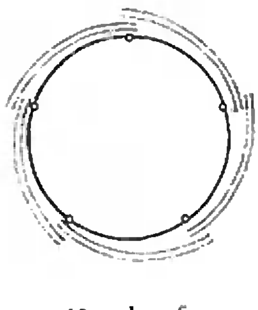
Д. Фомин

*) См. об инвариантах «Квант», 1982, № 7, с. 28 или 1983, № 10, с. 30.

M1200*. *Для каких k можно расположить на окружности а) 10; б) 100; в) n дуг так, чтобы каждая из них пересекалась ровно с k другими?*



а) $n=10$, $k=4$;



б) $n=10$, $k=5$;
$l=1$, $d=5$.

О том, что эта задача не так проста, как может показаться на первый взгляд, свидетельствует о т в е т:

а) k — любое натуральное число, меньшее 10, кроме 3 и 7;

б) k — число, меньшее 100, для которого $k+1$ не делится на 8 (т. е. $k \neq 7, 15, \ldots, 95$);

в) k — число, меньшее n, для которого числитель несократимой дроби, равной $\frac{k+1}{n}$, нечетен.

Будем решать задачу сразу в общем случае в).

Приведем примеры, показывающие, что любое из указанных в ответе значений k возможно. Пусть сначала $\frac{k+1}{n}=\frac{1}{d}$, т. е. $k=n/d-1$, где d — некоторый делитель числа n ($1 \leqslant d < n$). Расставим на окружности d точек (скажем, делящих ее на равные части) и покроем каждую точку группой из $k+1$ небольших дуг так, чтобы дуги разных групп не пересекались. Каждая из $(k+1)d=n$ этих дуг пересекается с k другими.

Пусть, вообще, $\frac{k+1}{n}=\frac{2l+1}{d}$, т. е. $k+1=q(2l+1)$, $n=qd$, где l, d, q — целые числа ($0 \leqslant 2l < d$). Разделим окружность на d равных частей и возьмем дуги, состоящие из l таких частей, причем каждую из них в количестве q экземпляров. Каждая из $qd=n$ выбранных дуг имеет общие точки (включая концы) с $q-1+2lq=k$ другими — с $q-1$ дугами «своей группы» и со всеми q дугами, отстоящими на 1, 2, ..., l частей в ту и в другую стороны. (Мы можем, конечно, слегка увеличить каждую дугу — тогда все их можно сделать различными, а все попарные пересечения — дужками, а не отдельными точками. На рисунках а) и б) приведены два примера для $n=10$, соответствующие $k=4$ и $k=5$.)

Докажем теперь, что если n дуг размещены так, что каждая пересекается лишь с k другими, то в несократимом представлении дроби $\frac{k+1}{n}$ числитель нечетен (другими словами, $k+1$ не делится на 2^{r+1}, если $n=2^r m$, где m — нечетно).

Заметим, что если одна из дуг целиком содержит другую, можно ее сжать до размеров этой меньшей: ясно, что они пересекаются с одним и тем же набором дуг. Отметим точки, где начинаются и кончаются дуги (мы обходим окружность, для определенности, против часовой стрелки); если для некоторой из этих точек нет начинающихся (или нет заканчивающихся) в ней дуг, можно снять прилегающий к ней отрезок — сжать дуги; в конце концов мы получаем *приведенную* систему дуг.

Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_d$ — точки, где начинаются и кончаются дуги, и пусть в точке M_i начинается q_i дуг, состоящих из l_i частей, т. е. заканчивающихся в точке M_{i+l_i} (здесь и дальше мы считаем, что индексы рассматриваются «по модулю d», т. е. индекс $d+1$ заменяем на 1, $d+2$ — на 2, ..., 0 — на d, -1 — на $d-1$ и т. д.). Очевидно, $l_2 \geqslant l_1$ — иначе дуга второй группы, начинающаяся в M_2, содержалась бы в дуге, начинающейся в M_1; далее, $l_3 \geqslant l_2, \ldots, l_d \geqslant l_{d-1}, l_1 \geqslant l_d$, поэтому все «длины» $l_1, l_2, \ldots, l_d$ равны одному и тому же числу l. При этом дуга i-й группы пересекается по условию с k другими:

$$q_{i-l}+q_{i-l+1}+\ldots+(q_i-1)+\ldots+q_{i+l}=k,$$

а общее число дуг равно $q_1+\ldots+q_d=n$. Складывая равенства $q_{i-l}+q_{i-l+1}+\ldots+q_i+\ldots+q_{i+l}=k+1$ по всем $i=1, 2, \ldots, d$ и учитывая, что каждое q_j встречается в $2l+1$ из этих равенств, получим: $n(2l+1)=(k+1)d$, т. е.

$$\frac{k+1}{n}=\frac{2l+1}{d}; \qquad (*)$$

отсюда следует, что указанное в ответе в) условие выполнено.

Отметим, что любая «приведенная» система дуг, удовлетворяющих условию, задается числами l, d, удовлетворяющими условию (*), где $0 \leqslant 2l \leqslant d$, и набором натуральных чисел $q_1, q_2, \ldots, q_d$, имеющим период НОД$(2l+1, d)$, для которого $q_1+q_2+\ldots+q_{2l+1}=k+1$. (Любая другая система получается из приведенной расширением некоторых дуг, не приводящим к новым пересечениям.)

С. Генкин, Д. Фомин

Ф1208. *Многие из вас, по-видимому, замечали, что в тот момент, когда вы ступаете на мокрый песок, он светлеет. Это связано с тем, что песок становится суше. Но как только вы убираете ногу, след, оставленный ногой, немедленно заполняется водой. Объясните это явление.*

Чтобы объяснить, что происходит с песком на берегу реки, начнем с... шариков.

Одинаковые шарики можно уложить на плоскости так, чтобы каждый из них касался шести других шаров. В лунки между шарами первого слоя можно положить шары второго слоя, каждый из которых будет касаться трех шаров нижнего слоя и шести — своего слоя, и т. д. Полученное таким образом расположение называется плотной упаковкой шаров. Если нарушить плотную упаковку, промежутки между шарами увеличатся, возрастет и объем всей системы. Это означает, что если на систему шаров действуют силы, приводящие к нарушению плотной упаковки, объем системы увеличивается за счет увеличения промежутков между шарами.

Аналогично ведет себя и любая зернистая среда. Возьмите, например, пшено (или кофе), наполните им стакан, слегка встряхните стакан, чтобы зерна расположились, образуя наиболее плотную из возможных упаковку, и затем надавите на пшено. Давление приведет к нарушению плотной упаковки, т. е. к увеличению объема, занимаемого зернами, и часть зерен высыпется. Если теперь слегка постучать по стакану с тем, чтобы зерна вновь «упаковались» наиболее плотно, стакан окажется не заполненным доверху.

Теперь вернемся к песку на берегу. Он тоже плотно упакован. При давлении на песок плотная упаковка разрушается, и объем песка увеличивается за счет увеличения пространства между песчинками. Вода из верхних слоев песка уходит вглубь, заполняя эти увеличившиеся промежутки, и песок как бы высыхает. Когда ногу убирают, плотная упаковка восстанавливается, а вытесненная из вновь уменьшившихся промежутков вода заполняет след, оставленный ногой.

И. Слободецкий

Ф1209. *Груз висит на упругой нити. Если к грузу прикладывать силу, медленно нарастающую от нулевого значения, то нить оборвется, когда величина силы достигнет значения F_1. При какой минимальной величине силы оборвется нить, если прикладываемая сила мгновенно достигает некоторого значения и в дальнейшем остается неизменной?*

Упругую нить можно рассматривать как пружину. Пусть жесткость этой пружины равна k. Согласно условию задачи, при медленном нарастании силы нить обрывается, когда полная сила $F_п$, приложенная к ней, равна

$$F_п = mg + F_1,$$

где m — масса подвешенного груза. Посмотрим, что происходит в том случае, когда прикладываемая сила мгновенно достигает некоторого значения F и в дальнейшем не меняется.

В начальный момент (когда сила равна нулю) нить растянута под действием силы тяжести груза на величину x_0, определяемую условием $kx_0 = mg$, т. е. координата конца нити в положении равновесия равна $x_0 = mg/k$ (за начало отсчета принято положение конца нити в отсутствие груза). При действии силы F координата конца нити в положении равновесия будет равна $x' = mg/k + F/k$. Однако в состояние равновесия система перейдет лишь после затухания возникающих колебаний. Начальная амплитуда этих колебаний определяется начальным отклонением системы от положения равновесия: $x_m = x' - x_0 = F/k$. Так как затухание колебаний мало́, через полпериода полное растяжение пружины будет равно

$$x_п = \frac{mg+F}{k} + x_m = \frac{mg}{k} + 2\frac{F}{k}.$$

Значит, в этот момент к нити приложена полная сила

$$F'_п = mg + 2F.$$

Нить оборвется, если эта сила больше, чем сила $F_п$, определяющая предел прочности нити.

Таким образом, минимальная сила F_{min}, при которой произойдет обрыв нити, находится из условия $F'_п = F_п$, т. е.

$$mg + 2F_{min} = mg + F_1,$$

откуда получаем

$$F_{min} = F_1/2.$$

Г. Баронов

Ф1210. *Для исследования свойств нелинейного резистора был произведен ряд*

Тепловая мощность, выделяющаяся при прохождении тока через резистор, частично идет на нагревание резистора, а частично рассеивается в окружающее *экспериментов. Вначале была исследована зависимость сопротивления резистора от температуры. При повышении температуры до значения $t_1=100$ °C мгновенно происходил скачок сопротивления от величины $R_1=50$ Ом до величины $R_2=100$ Ом; при охлаждении обратный скачок происходил при температуре $t_2=99$ °C (рис. 1). Во втором опыте к резистору приложили постоянное напряжение $U_1=60$ В, при котором его температура оказалась равной $t_3=80$ °C. Наконец, когда к резистору приложили постоянное напряжение $U_2=80$ В, в цепи возникли самопроизвольные колебания тока. Определите период этих колебаний, а также максимальное значение тока. Температура воздуха в лаборатории постоянна и равна $t_0=20$ °C. Теплоотдача от резистора пропорциональна разности температур резистора и окружающего воздуха. Теплоемкость резистора $C=3$ Дж/К.*

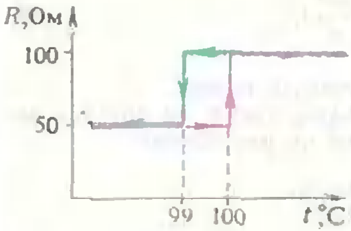


Рис. 1.

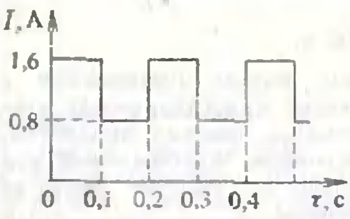


Рис. 2.

пространство. В состоянии теплового равновесия (когда температура резистора остается постоянной) вся выделяющаяся мощность рассеивается.

Обозначим через α коэффициент пропорциональности между рассеиваемой на резисторе мощностью и разностью температур резистора и окружающего воздуха. При температуре $t_3=80$ °C сопротивление резистора равно $R_1=50$ Ом (см. рис. 1). Тогда из равенства

$$\frac{U_1^2}{R_1}=\alpha(t_3-t_0)$$

получаем

$$\alpha=\frac{U_1^2}{R_1(t_3-t_0)}=1,2\,\frac{\text{В}^2}{\text{Ом}\cdot\text{К}}.$$

Самопроизвольные колебания тока при напряжении на резисторе $U_2=80$ В происходят в результате колебаний значения сопротивления резистора. Когда температура резистора становится равной $t_1=100$ °C, сопротивление его скачком увеличивается от $R_1=50$ Ом до $R_2=100$ Ом. В результате тепловая мощность, выделяющаяся на резисторе, уменьшается, резистор начинает охлаждаться (отвод тепла происходит интенсивнее, чем потребление). Когда температура резистора падает до $t_2=99$ °C, сопротивление его скачком уменьшается от 100 Ом до 50 Ом. Тепловая мощность, выделяющаяся на резисторе, увеличивается, резистор вновь нагревается (потребление тепла происходит быстрее, чем отвод). При температуре $t_1=100$ °C вновь происходит скачок сопротивления, и процесс повторяется.

Период колебаний тока в цепи

$$T=\tau_1+\tau_2,$$

где τ_1 — время нагрева резистора от t_2 до t_1, τ_2 — время охлаждения от t_1 до t_2. Запишем соответствующие уравнения теплового баланса:

$$\frac{U_2^2}{R_1}\tau_1=\tau_1\alpha(t_1-t_0)+C(t_1-t_2),$$

$$\frac{U_2^2}{R_2}\tau_2=\tau_2\alpha(t_1-t_0)-C(t_1-t_2)$$

(поскольку температура резистора меняется очень незначительно, можно считать, что отводимая тепловая мощность постоянна и равна $\alpha(t_1-t_0)$). Подставляя числовые данные, находим

$$\tau_1=\tau_2\approx0,1\text{ с}\Rightarrow T\approx0,2\text{ с}.$$

Максимальное значение тока равно, очевидно,

$$I_{\max}=\frac{U_2}{R_1}=1,6\text{ А},$$

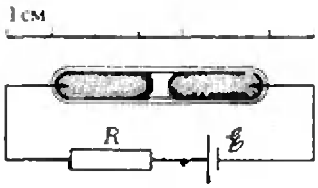
минимальное значение —

$$I_{\min}=\frac{U_2}{R_2}=0,8\text{ А}.$$

График изменения тока в цепи со временем приведен на рисунке 2.

А. Буздин

Ф1211. *В запаянной капиллярной трубке находятся два столбика ртути, разделенные капелькой раствора электролита HgI_2. Внутренний диаметр трубки $d=0{,}3$ мм. Трубка подключена последовательно с резистором с сопротивлением $R=390$ кОм к батарее с ЭДС $\mathcal{E}=10$ В. Через какое время капелька сместится на одно деление шкалы (см. рисунок)?*



Протекание электрического тока в электролите связано с переносом массы. В данном случае на катоде происходит восстановление металлической ртути из раствора электролита, а на аноде — окисление ртути, т. е. переход ее в раствор электролита. В соответствии с законом электролиза Фарадея, масса m ртути, выделившейся на катоде за время t, равна

$$m=\frac{1}{F}\,\frac{M}{n}\,It, \qquad (1)$$

где $F=9{,}65\cdot10^4$ Кл/моль — число Фарадея, $M=0{,}201$ кг/моль — молярная масса ртути, $n=2$ — валентность ртути, I — протекающий ток. Так как сопротивление металлической ртути и электролита и внутреннее сопротивление источника ничтожно малы по сравнению с R, протекающий ток равен

$$I=\mathcal{E}/R. \qquad (2)$$

Выделение ртути на катоде и растворение ее на аноде приводят к смещению капельки электролита в сторону анода. Расстояние l, на которое сместится капелька, связано с массой выделившейся на катоде ртути очевидным соотношением

$$m=\rho\,\frac{\pi d^2}{4}\,l, \qquad (3)$$

где $\rho=13{,}6\cdot10^3$ кг/м^3 — плотность ртути.

Из равенств (1) — (3) находим время, за которое капелька электролита сместится на расстояние l:

$$t=\frac{\pi d^2 F n \rho R l}{4M\mathcal{E}}.$$

Подставив значения, приведенные в условии, и $l=1$ см, получим

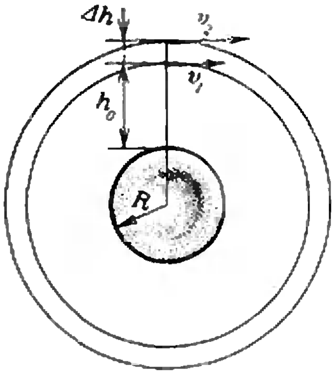
$$t\approx100 \text{ ч}.$$

Подобные «ртутные часы» нашли применение в электронной технике в качестве малогабаритных времязадающих устройств, счетчиков времени наработки. Их используют также в качестве кулонметров для измерения заряда, протекшего по участку цепи за длительный промежуток времени.

Е. Юносов. И. Яминский

Задачник „Кванта"

Ф1212. *Коэффициент преломления атмосферы планеты X уменьшается с высотой h над ее поверхностью по закону $n = n_0 - \alpha h$. Радиус планеты R. Найти, на какой высоте h_0 над поверхностью планеты находится оптический канал, по которому световые лучи будут обходить планету, оставаясь на постоянной высоте.*



В атмосфере, где коэффициент преломления n уменьшается с высотой, свет распространяется не прямолинейно. Поворот фронта световой волны, и, следовательно, искривление световых лучей, происходит из-за того, что скорость света в среде $v = c/n$ тем меньше, чем больше коэффициент преломления.

Обозначим через Δh ширину оптического канала, по которому световые лучи будут обходить планету, оставаясь на постоянной высоте (см. рисунок). Рассмотрим два крайних луча. Луч, остающийся на постоянной высоте h_0, обойдет планету за время

$$t = \frac{2\pi(R+h_0)}{v_1} = 2\pi(R+h_0)\frac{n_0-\alpha h_0}{c}.$$

Другой луч того же светового канала, отстоящий от первого на расстояние $\Delta h \ll h_0$, должен обойти планету на высоте $h_0+\Delta h$ за то же самое время (только в этом случае фронт световой волны, распространяющейся по каналу, будет всюду перпендикулярен окружности радиусом $R+h_0$):

$$t = \frac{2\pi(R+h_0+\Delta h)}{v_2} = 2\pi(R+h_0+\Delta h)\frac{n_0-\alpha(h_0+\Delta h)}{c}.$$

Приравняв времена распространения и учитывая, что $\Delta h \ll h_0$, найдем

$$h_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{n_0}{\alpha} - R\right).$$

Заметим, что рассмотренное явление называется круговой рефракцией. Как показывают наблюдения, оно реально возможно, например — в атмосфере Венеры.

Поправка

В «Кванте» № 3 за 1990 в условии задачи М1213 из «Задачника «Кванта» была допущена ошибка. Правильное условие:

М1213. а) Докажите, что если выпуклый шестиугольник можно разрезать на параллелограммы, то он имеет центр симметрии.

б) Докажите, что если выпуклый шестиугольник, в котором каждая диагональ, соединяющая противоположные вершины, параллельна двум сторонам, можно разрезать на N параллелограммов равной площади, то N делится на 3.

Срок отправки решения задачи продлевается до 15 июля. Редакция приносит читателям свои извинения.

„Квант" улыбается

Движенья — нет?

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее бы не мог он возразить;
Хвалили все ответ замысловатый.
Но, господа, забавный случай сей
Другой пример на память мне приводит:
Ведь каждый день пред нами солнце ходит,
Однако ж прав упрямый Галилей.

А. С. Пушкин. Движение

Читал я тут как-то Пушкина. Отлично пишет. Про хлеб, про любовь. Про гордость...

И вдруг читаю: «Движенья нет...» Как так? Ну, то, что справедливости нет — это все знают, но чтоб и движенья не было? Сомнительно.

Выясняю. Оказывается, 2500 лет назад жил Зенон, философ. И однажды он спросил: «10 000 зерен — это куча, 2 зерна — не куча, а где же граница?» Ну, естественно, всем вокруг неловко, ответа не знают. Умней всех он, видите ли! Потом справились, назвали его выходку апорией, или парадоксом. Пословицу пустили, мол, один дурак придумает столько апорий, что ста мудрецам не ответить. Полегчало.

А Зенон не унимается, в соответствии с пословицей — апория за апорией. В частности, насчет движения: апории стрелы, стены, Ахиллеса.

Пусть стрела летит. В какой-то момент времени она находится в какой-то точке. Если она находится в какой-то точке, то она не летит. Противоречие. Движения нет.

Пусть Геракл (это у них такой штангист был) стоит на большом расстоянии от стены. Может он сразу оказаться у нее? Нет. А сразу на полпути? Нет. А сразу на полполпути? Нет. Так ведь сколько пополам ни дели — чистого нуля не получить. Противоречие. Движения нет.

Ему, естественно, умные люди возражают, мол, что ты от штангиста хочешь? Конечно, он не очень быстро бегает. Ты придумай что-нибудь про нашего спринтера Ахиллеса, уж он-то всех обгоняет.

Пожалуйста, говорит. Пусть он обгоняет черепаху, но черепахе — фору, идет? Согласились. Ребята! — говорит.— Когда Ахиллес пробежит эту фору, черепаха хоть немного, но проползет. Опять фора. Получается сказочка про белого бычка. Противоречие. Движения нет.

Это он так резко выражался, потому что в те времена у философов были суровые нравы. Если что-то противоречит логике и истине, то этого нет. Им истина была даже дороже друзей.

Но в наше время появились такие философы — только держись! Вообще, говорят, ничего не бывает без противоречий. Это, по-моему, перебор. Я считаю, надо хоть приблизительно знать, где какая теория применима. Совсем без теории — тоже плохо.

Выясняю про Зенона дальше. Лет так через 2200—2300 Лейбниц с Ньютоном начали Зеноновы апории потихоньку математически щелкать. Придумали дифференциальное и интегральное исчисления и научились точно определять, когда Ахиллес догонит черепаху. Бесконечные ряды научились суммировать и прочее.

Однако же. Во всех своих математических штучках опираются на теорию пределов. А там — основной постулат: если у тебя есть что-то бесконечно малое, считай его в пределе нулем. Ребята, так ведь это значит только одно: во всех Зеноновских задачах пренебреги физической сутью вопроса! А с апорией стрелы и вообще непонятно, что делать — там ведь математики совсем нет, одна логика. И чуть-чуть физики. Ну, конечно, можно отмахнуться, мол, это же просто слова. Но, ребята! Ведь физика — это не только математика, слова в ней нужны обязательно. Даже термин такой есть: интерпретационный механизм математической модели.

Я — к брату: что скажет? Сказал. Во-первых, бросай курить. Во-вторых, это интуитивно ясно и никому не нужно. А в-третьих, у каждого человека есть биополе, то есть аура. А может быть, этих аур даже не одна, а несколько. И при помощи бега и этих аур можно поправить свое здоровье и оценить качество продуктов и количество нитратов. Вот это действительно интересно и нужно. Вот так.

Племянник Ленька тоже поддержал разговор. Видик, говорит. И хард рок.

Ну, насчет аур и хард рока я не знаю. Может быть. А с Зеноном-то как?

И вот — самое интересное. Читаю я спор Бора с Эйнштейном насчет принципа неопределенности Гейзенберга и чувствую: что-то похожее на Зенона. Мамочки, это же самое то! Гейзенберг так и сказал: координату и скорость одновременно мы можем определять только приблизительно. И чем точнее координату, тем хуже скорость, и наоборот. Сел, посчитал. Счет — элементарный, только кроме неопределенностей координаты и скорости надо еще задать массу стрелы, Геракла, Ахиллеса и черепахи.

Вот такая формула:

$$\Delta x \cdot \Delta v \geqslant \frac{\hbar}{2m},$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, мировая константа.

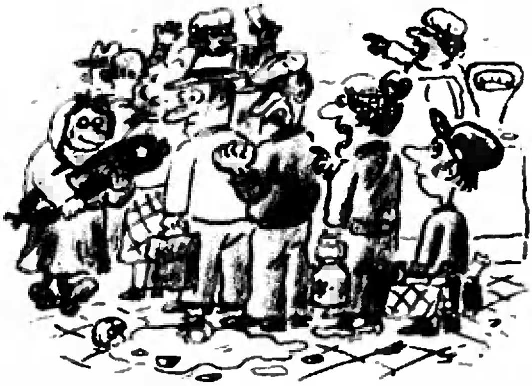
И тогда любой школьник может Зенону доказать, где его цепь рассуждений обрывается, так как он вступает в область квантовой механики.

С апорией стрелы чуть посложнее, но тоже понятно, как ее привести к виду, удобному для решения — договориться, что такое «движется» ($v \pm \Delta v$) и что такое «находится в данной точке» ($x \pm \Delta x$).

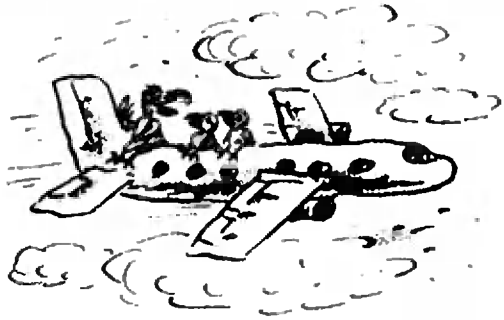
(Окончание см. на с. 49)

„Квант" для младших школьников

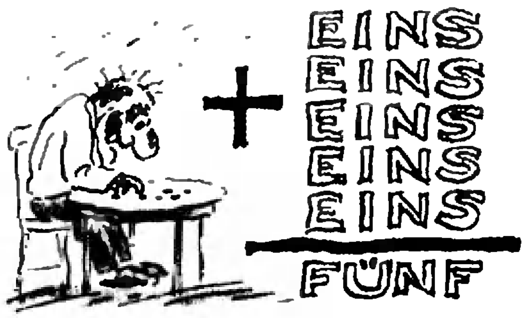
Задачи



1. Антон пошел в молочный магазин. Денег у него не было, но он взял пустые бутылки из-под молока — 6 литровых (по 20 копеек) и 6 пол-литровых (по 15 копеек). В магазине было только разливное молоко по цене 22 копейки за литр. Антон решил сдать часть бутылок, а купленное на полученные деньги молоко налить в оставшиеся бутылки. Какое наибольшее количество молока он сможет принести домой?



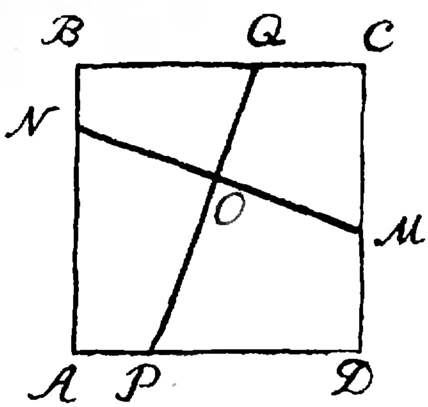
2. Самолет вылетел из города A в полдень и приземлился в городе B в 14 часов местного времени. В полночь он вылетел обратно и прилетел в город A тогда, когда там было 6 часов утра. Сколько времени длится перелет между этими городами на таком самолете?



3. Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. (По-немецки слова eins и fünf означают *один* и *пять*.)

4. Представьте число 1990 тремя различными способами в виде суммы нескольких (двух или больше) последовательных натуральных чисел.

5. В квадрате $ABCD$ проведены два взаимно перпендикулярных отрезка MN и PQ (см. рисунок). Покажите, что сумма периметров четырехугольников $APON$ и $CQOM$ равна сумме периметров четырехугольников $BNOQ$ и $DMOP$.



Эти задачи нам предложили А. Морозов, С. Дворянинов, М. Сафаралиев, А. Савин, В. Произволов.

В РОЛИ МАГДЕБУРГСКОГО БУРГОМИСТРА

Кандидат физико-математических наук
А. ШТЕЙНБЕРГ

Эта статья не совсем обычна. Вашему вниманию будут предложены несколько ситуаций из жизни одного из замечательных физиков прошлого — Отто фон Герике. О том, как решал Герике встававшие перед ним проблемы, мы расскажем. Но прежде чем знакомиться с его решениями, предлагаем вам испытать свои силы: подумайте, как бы вы справились с такой задачей? Возможно, вам удастся повторить ход мыслей Герике. А может быть, вы придумаете что-нибудь оригинальное. Никаких специальных знаний, выходящих за рамки вашего учебника, для этого не потребуется. Только фантазия, воображение и здравый смысл.

Отто фон Герике (1602—1686) родился в Магдебурге. После завершения образования (он изучал право, математику и инженерное дело в университетах Лейпцига, Гельмштедта, Иены, путешествовал по Франции и Англии, где знакомился со многими учеными) возвратился в родной город. Здесь он был избран членом городского совета и много сил отдал строительству и укреплению Магдебурга. В 1646 году за заслуги перед Магдебургом он был избран его бургомистром и прославился на этом посту не только разумным управлением, но и замечательными физическими опытами.

Целью первых своих опытов Герике поставил получение пустого пространства — пространства, не заполненного ничем, даже воздухом. Широко распространенная точка зрения на этот вопрос состояла в том, что пустого пространства быть не должно, так как «природа не терпит пустоты». Опровергнуть это заблуждение можно было только опытом.

Сначала для этой цели Герике взял винную бочку, наполнил ее водой и плотно закупорил, чтобы внутрь не мог проникнуть наружный воздух. Затем подсоединил к бочке узкую

Опыты с магдебургскими полушариями...

трубку с поршнем и, выдвигая поршень, попытался извлечь воду из бочки. По замыслу Герике в бочке после этого должна была остаться пустота. Вот как описывает опыт сам Герике:

«После установки трубы в нижней части бочки я попытался извлечь из нее воду. Однако прежде чем вода последовала за поршнем, лопнули железные обручи и болты, с помощью которых труба была прикреплена к бочке.

Тем не менее усилия вовсе не были безнадежными... После того как недостатки установки были устранены посредством использования более сильных болтов, трое сильных мужчин, тянувших за шток, смогли наконец извлечь следующую за поршнем воду...

При этом, однако, во всех частях бочки слышался шум, как будто вода сильно кипела, и это продолжалось до тех пор, пока бочка вместо извлеченной воды не заполнилась воздухом».

Опыт, как вы видите, закончился неудачей. Однако Герике не сдался и придумал прием, с помощью которого ему все-таки удалось создать пустоту в бочке.

Подумайте, как бы это сделали вы.

В дальнейшем Герике научился создавать пустоту с помощью придуманного им нового прибора — воздушного насоса. Им он, в частности, воспользовался в своем знаменитом опыте с магдебургскими полушариями. Вы о нем, скорее всего, знаете: две упряжки лошадей отрывали друг от друга два сомкнутых полушария, из которых был предварительно откачан воздух. Опыт был исключительно эффектен и на его демонстрации присутствовал даже император «Священной Римской империи» Фердинанд III.

Попытайтесь придумать простейшую схему насоса для откачки воздуха.

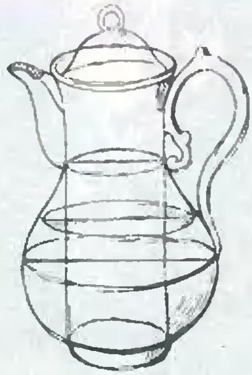
Своим насосом Герике воспользовался и для совсем другой цели. Он много занимался акустическими исследованиями. Его, в частности, интересовало, каким образом распространяется звук, какая среда передает его от источника до нашего уха. Сегодня мы знаем, что это — воздух, но впервые установил этот факт Герике.

Отто фон Герике. (С гравюры 1640 г.)

Попытайтесь представить себе схему его опыта.

Убедившись, что воздух действительно передает звук, Герике заинте-

Калейдоскоп „Кванта"

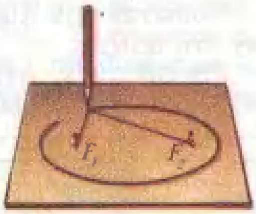


Эллипс

С эллипсом человек познакомился, видимо, сразу же после изобретения колеса — ведь вид круга сбоку является эллипсом.

Свое название (по-гречески — «недостаток») эллипс получил в трудах одного из последних древнегреческих геометров Аполлония из Перги (III век до н. э.), а первое описание эллипса и его свойств содержатся в трудах другого древнегреческого геометра Менехма (IV век до н. э). Там он появляется как сечение цилиндра плоскостью.

Одно из красивейших свойств эллипса, часто принимаемое за его определение, таково: «Эллипс — геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых до двух заданных точек этой плоскости F_1 и F_2 (фокусов) — величина постоянная». Эта величина обозначается через $2a$. На этом свойстве основан способ разбивки клумб эллиптической формы, часто применяемый садовниками. Два колышка, палка и веревка — вот и весь инструмент.



Из определения эллипса следует, что длина наибольшего из «диаметров» эллипса равна $2a$. Длина наименьшего из «диаметров» обозначается через $2b$. Расстояние между фокусами обозначают через $2c$. Числа a, b, c связаны соотношением $a^2=b^2+c^2$, которое легко устанавливается из рисунка 1. Уравнение

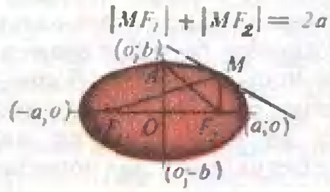


Рис. 1.

эллипса в системе координат, изображенной на рисунке 1, таково:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Если $a=b$, то эллипс превращается в окружность.

Эллипс можно определить еще и как кривую, полученную из окружности равномерным сжатием к одному из диаметров окружности (рис. 2).

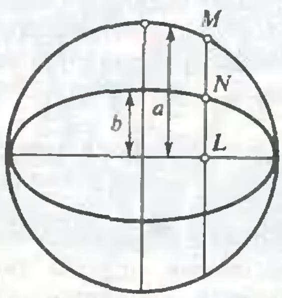
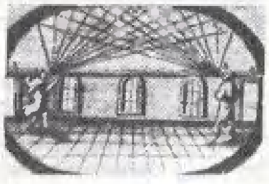


Рис. 2.

Очень интересно так называемое оптическое свойство эллипса. Луч, выходящий из одного его фокуса, после отражения от эллипса попадает во второй его фокус. Это свойство объясняет феномен некоторых пещер, имеющих эллипсообразные своды, где слово, сказанное



в одной (особой) точке пещеры, необычайно отчетливо слышно в другой ее точке, отстоящей на значительное расстояние от первой. Эффект фокусирования звука сводчатым эллиптическим потолком был известен архитекторам еще в XVII веке.

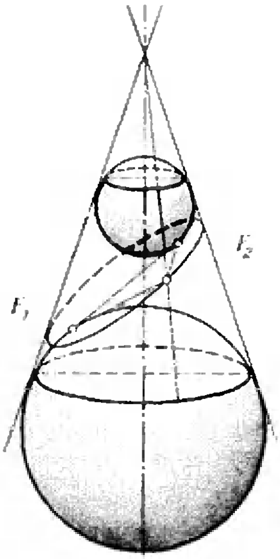


Рис. 3.

Любое ограниченное сечение плоскостью конуса (бесконечного) также будет эллипсом. Любопытно, что шары, касающиеся конуса и секущей его плоскости, соприкасаются с ней в фокусах эллипса (рис. 3). Этот факт был открыт в 1822 году бельгийским математиком Данделеном (1794—1847).

Интерес к эллипсу сильно возрос после того, как в 1609 году немецкий астроном и математик Иоганн Кеплер установил, что небесные тела Солнечной системы — планеты, кометы, астероиды — движутся по эллипсам вокруг Солнца, причем Солнце находится в одном из фокусов таких эллипсов (рис. 4).

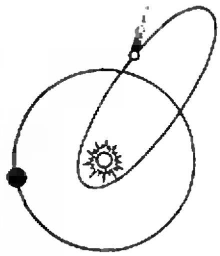


Рис. 4.

Мы привыкли к круглым колесам, «круглым» шестерням и т. д., но в технике встречаются и «эллиптические» шестерни. Если взять два одинаковых эллипса, шарнирно закрепить один из фокусов первого эллипса в некоторой точке A, а фокус другого эллипса — в точке B, находящейся на расстоянии $2a$ от A, то из оптического свойства эллипса будет следовать, что при соприкосновении этих эллипсов точка касания всегда будет лежать на отрезке AB (рис. 5), и при вращении одного из эллипсов второй будет катиться по нему без скольжения. Такие шестерни применяются в тех случаях, когда требуется превратить равномерное вращение в неравномерное.

Меру «вытянутости эллипса» можно охарактеризовать величиной $k=b/a$ — коэффициентом сжатия окружности, при котором получился данный эллипс. Но чаще в качестве такой характеристики рассматривают величину $\varepsilon=\frac{c}{a}<1$, которая называется эксцентриситетом. Для окруж-

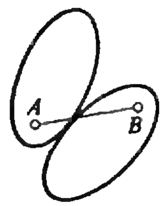


Рис. 5.

ности $\varepsilon=0$, а для сильно вытянутых эллипсов, например орбит комет, ε близко к 1.

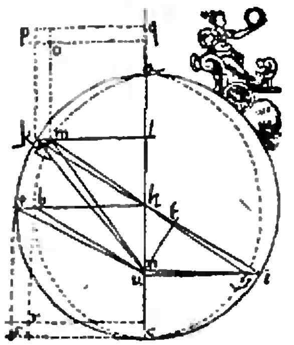
Вспомним, что отношение длины окружности к ее диаметру — число π — не является рациональным числом. Площадь, ограниченная эллипсом, равна πab, но длину эллипса оказывается невозможно выразить через a и b с помощью известных в школе (так называемых элементарных) функций. Длина эллипса может быть представлена в виде бесконечного ряда

$$L=2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3}-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{\varepsilon^6}{5}-\ldots\right],$$

из которого она может быть найдена с любой точностью. Длина дуги эллипса, которая видна из его центра (середины отрезка между фокусами) под углом φ, отсчитываемым от положительного направления оси x, равна интегралу

$$l(\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 u}\,du;$$

этот интеграл называется эллиптическим интегралом. Эллиптическими интегралами называются еще несколько похожих интегралов. Эллиптические интегралы породили функции, оказавшиеся очень полезными в приложениях математики, а именно — функции, обратные к функциям, задаваемым эллиптическими интегралами. Такие функции назвали эллиптическими функциями.



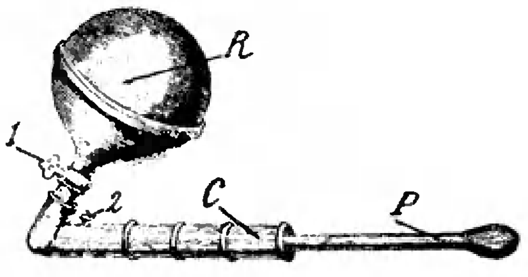
ресовался: а не может ли звук передаваться и через другие среды? Он придумал оригинальный опыт, показавший, что звук распространяется и в воде.

Какой эксперимент вы поставили бы для подтверждения этого факта?

Если вы сумели ответить на все вопросы — это очень хороший результат. Но не стоит все-таки слишком обольщаться. Дело в том, что правильно поставить проблему не менее трудно, чем ее решить. Когда знаешь, над чем думать, думать значительно легче.

А теперь — о том, как решал поставленные им самим проблемы Отто фон Герике.

Ситуация 1. Герике поместил бочку, из которой откачивалась вода, внутрь большей бочки, которую также заполнил водой. Таким образом ему удалось более надежно изолировать внутреннюю бочку от наружного воздуха. Полностью предотвратить просачивание во внутреннюю бочку, правда, не удалось. Когда ее через три дня открыли, она частично оказалась заполненной водой и воздухом. Тем не менее до вскрытия часть ее все же была пустой (воздух проник в бочку во время вскрытия).

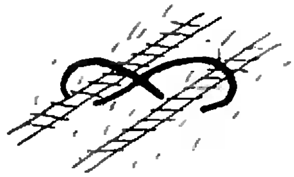


Ситуация 2. Воздушный насос Герике изображен на рисунке. Откачиваемый сосуд R соединен краном 1 с цилиндром C, в котором перемещается плотно прилегающий к стенкам цилиндра деревянный поршень P со смазанной маслом кожаной покрышкой. В левой части цилиндра имеется кран 2. Чтобы откачать воздух из R, сначала закрывают кран 1, открывают кран 2 и перемещают поршень в крайнюю левую позицию для удаления всего воздуха из цилиндра C. После этого кран 2 закрывают, открывают кран 1 и перемещают поршень в крайнее правое положение. Часть воздуха из сосуда R переходит при этом в цилиндр C. После этого вновь закрывается кран 1, открывается кран 2 и повторяется первый такт. Поршень у Герике приводился в движение с помощью зубчатой рейки и шестерни. Работникам при откачке воздуха приходилось изрядно попотеть.

Ситуация 3. Герике поместил колокол в сосуд, из которого воздух можно было откачивать с помощью насоса. Кроме того, он приспособил часовой механизм так, чтобы колокол звонил через определенные промежутки времени автоматически. А далее он отчетливо наблюдал ослабление звука по мере уменьшения давления в сосуде. После этого стало очевидным, что звук действительно передается через воздух. А через воду?

Ситуация 4. На этот вопрос Герике сумел найти ответ с помощью эксперимента, который можно назвать физическим с очень большой натяжкой. Скорее он ближе к физиологическим опытам Ивана Павлова над собаками. Тем не менее идея весьма остроумна. «Лабораторией» послужил пруд с колоколом на берегу. Колокол звонил всякий раз, когда рыбе бросали в определенное место корм. Когда рыбу приучили, она стала приплывать на место кормежки просто по сигналу колокола, хотя экспериментаторы ничем ее при этом не потчевали. Это было достаточно убедительным доказательством того, что звук передается и водой. Позднее результат Герике был подтвержден водолазами, которые слышат звук под водой.

„Квант" улыбается

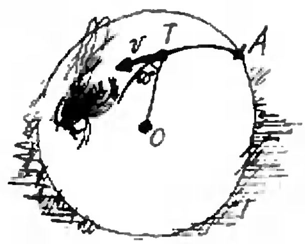


Задача о встречных поездах

Представьте себе, что вы являетесь пассажиром необычного бесконечно длинного поезда, составленного из пассажирских и товарных вагонов, причем и паровоз, и все вагоны имеют одинаковую длину и расположены друг за другом в определенном порядке, который связан со значением целого числа k. Это число мы будем называть «классом» поезда. Условимся считать, что сразу за паровозом расположен пассажирский вагон № 1, за которым идут несколько товарных вагонов, а именно столько, что следующий пассажирский вагон № 2 занимает в составе место 2^k, считая от паровоза. Затем идут опять товарные вагоны, потом пассажирский вагон № 3 на месте 3^k и т. д. Будем считать, что число k может принимать значения $k=3, 4, 5,...$ Например, первые пять пассажирских вагонов с номерами 1, 2, 3, 4, 5 в поезде «третьего класса» ($k=3$) будут занимать соответственно места 1, 8, 27, 64, 125, а в поезде «четвертого класса» ($k=4$) они должны занимать места 1, 16, 81, 256, 625 и т. д.

Теперь представьте себе, что навстречу нашему поезду по соседнему пути едет поезд такого же класса, как и наш, и машинисты обоих составов дают короткие гудки в каждый такой момент, когда паровоз поравняется с очередным пассажирским вагоном встречного поезда. Таким гудком машинист приветствует пассажиров именно этого встречного вагона, но в момент очередного гудка люди во всех других пассажирских вагонах также бросаются к окнам, надеясь увидеть напротив своего вагона тоже пассажирский вагон со встречными пассажирами и желая приветствовать их, однако это им никогда не удается, в каком бы вагоне они ни находились. Как вы думаете, почему? Ответ вы найдете на этой странице.

Б. Трубников



Об обратимости времени

Законы механики обратимы во времени, т. е. «выдерживают» замену переменной времени t на $(-t)$. А как обстоит дело с математикой?

Муха T ползет по круглому столу с постоянной скоростью. Она начинает свой путь в точке A граничной окружности, и ее скорость в каждый момент времени составляет угол в $60°$ с отрезком OT, где O — центр стола (см. рисунок). Если R — радиус стола, а v — скорость мухи, то проекция скорости на радиус-вектор OT равна $v/2$. Поэтому через время $t=2R/v$ муха окажется в точке O.

Попробуем обратить время. Теперь муха выползает из центра стола и движется к краю так, что ее скорость v составляет угол в $60°$ с радиусом-вектором OT. Через время $t=2R/v$ она окажется в точке граничной окружности... Но в какой именно точке? В точке A? Но ведь она была выбрана совершенно произвольно. Мы приходим к выводу, что муха может оказаться в любой точке окружности! В чем тут дело? Ответ вы найдете на этой странице.

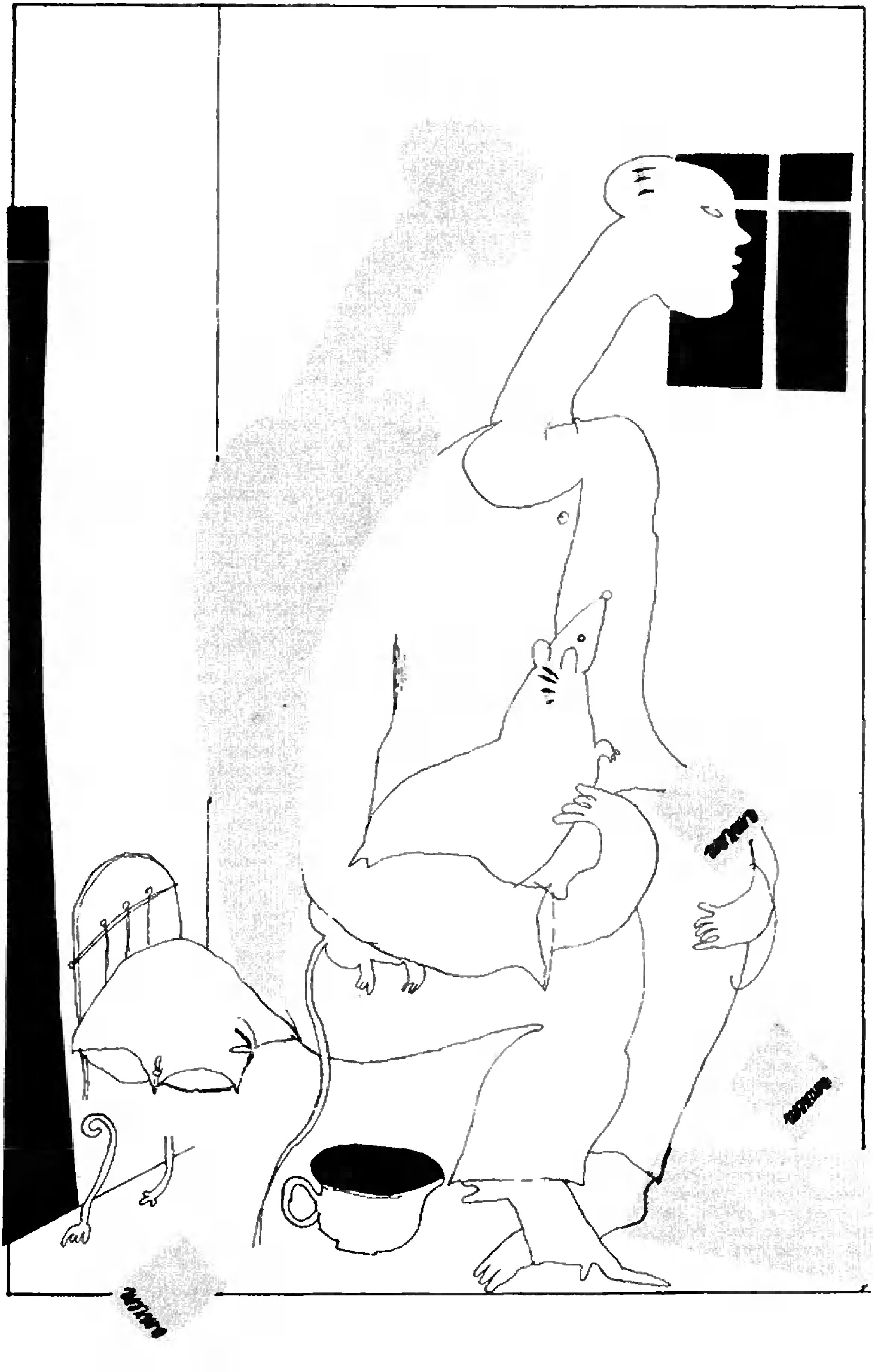
С. Т.

Хадзеоп хынчертсв о ачадаз

Пусть паровоз первого поезда поравнялся с пассажирским вагоном с номером z^k второго поезда. Тогда пассажиры вагонов с номерами x^k первого поезда и y^k второго поезда увидят друг друга, если $x^k+y^k=z^k$. Это — знаменитое уравнение Ферма, о котором существует гипотеза, что при $k>2$ оно не имеет решений в натуральных числах. Эта гипотеза, известная также как «Великая (или последняя) теорема Ферма» не доказана и не опровергнута до сих пор.

Инемерв итсомитарбо бо

Спираль, по которой движется точка T, делает бесконечное число оборотов вокруг точки O, прежде чем муха попадет в центр стола. При обращении времени движение точки T перестает быть определенным — за любой, даже самый малый, отрезок времени она должна сделать бесконечное число оборотов вокруг O. Ситуация напоминает суммирование геометрической прогрессии $1+{}^1/_2+{}^1/_4+{}^1/_8+...=2$. Сумма первых n членов равна $2-({}^1/_2)^{n-1}$, что в пределе обращается в 2, однако суммирование прогрессии «с конца» не имеет смысла.



ЦВЕТЫ ДЛЯ ЭЛДЖЕРНОНА

(фантастический рассказ)

Д. КИЗ (США)

1. атчет о праисходящем — 5 марта 1956

Доктор Штраусс говорит что с севодняшниво дня я должен записывать все что я думаю и что со мною случаица. Я незнаю зачем это нужно но он говорит это очинь важно для таво чтобы посмотреть использывать меня или нет. Я надеюсь они меня используют. Мисс Киннием говорит может они сделают меня умным. Я хочу быть умным. Меня зовут Чарли Гордон. Мне 37 лет и две недели назад был мой день раждения. Сейчас мне больше писать нечево и на севодня я кончаю.

2. атчет о праисходящем — 6 марта

Севодня у меня было испытание. Я думаю что я несправился и мне кажеца может теперь они небудут меня использывать. А было так в комнате сидел какойто добрый молодой человек и у нево было немножко белых карточек и все они залиты чирнилами. Он сказал Чарли что ты видиш на этой карточке.

Я сказал что вижу чирнильную кляксу. Он сказал правильно. Я подумал это все но когда я встал чтобы уйти он остановил меня. Он сказал садись Чарли мы еще не кончили. Я не так хорошо помню что было потом он вроде захотел чтобы я сказал что я вижу в чирнильной кляксе. Я ничево в ней неувидел но он сказал что там картинки что другие люди видят какието картинки. А я несмог увидеть никаких картинок. Я паправде старался увидеть. Я держал карточку близко от глаз а потом далеко. Я сказал еслибы у меня были очки я бы видел получше я одеваю очки только в кино или когда смотрю телевизор но я сказал что они в шкафу в передней. Я их принес. Потом я сказал дайте мне еще посмотреть на эту карточку я обязатильно теперь найду картинку.

Я очинь старался но всетаки никак немог найти картинки. Я видел только чирнильную кляксу. Я сказал ему может мне нужны новые очки. Он чтото написал на бумаге я испугался что невыдиржал испытание. Я сказал ему это очинь красивая клякса с малинькими точками вокруг. Он стал очинь пичальным значит я ошибся.

3. атчет о праисходящем — 7 марта

Доктор Штраусс и доктор Немюр говорят что чирнильные кляксы это ничево незначит. Я сказал им я непраливал чирнило на карточки и я ничево немог разглядеть в кляксах. Они сказали что может быть они всетаки меня используют. Я сказал мисс Киннием никогда неделала мне такие испытания только праверяла письмо и чтение. Они сказали мисс Киннием говорит что я ее самый лучший учиник в вечерней шкле для взрослых потомучто я стараюсь больше всех и паправде хочу учитца. Они спрасили как это палучилось Чарли что ты сам прищел в вечернюю школу для взрослых. Как ты ее нашел. Я ответил что я спрашивал у людей и ктото мне сказал куда мне пойти чтобы научитца хорошо читать и писать. Они спрасили почему это тебе захотелось. Я сказал я всю жизнь хотел быть умным а не тупицей. Но умным быть очинь трудно. Они спрасили а ты знаш что это может быть времено. Я сказал да. Мисс Киннием мне говорила. Мне всеравно если это больно.

Севодня попозже у меня были еще какието психованые испытания. Это испытание показалось мне легким потомучто я мог разглядеть картинки. Только в этот раз добрая леди которая со мной занималась нехотела чтобы я расказал ей про картинки. Это меня запутало. Я сказал что вчерашний мущина прасил чтобы я расказал что я видел в кляксе она сказала что это ничево незначит. Она сказала придумай расказы про людей которые на картинках. Я сказал как можно расказывать про людей которых никогда невидел. Почему я должен придумывать неправду. Я теперь больше неговорю неправду потомучто я всегда пападаюсь.

Автор этого рассказа — американский писатель и педагог Дэниел Киз, в свое время он редактировал научно-фантастический журнал «Марвэл». Перепечатывается по изданию «Библиотека современной фантастики в 15-ти томах. Том 10» (М., Молодая гвардия, 1967). Перевод с английского С. Васильевой.

Потом люди в белых пальто повели меня в другую часть бальницы и дали мне игру. Это вроде состязания с белой мышкой. Они называли мышку Элджерноном. Элджернон сидел в коробке в которой было очинь много заваротов вроде всяких стенок и они дали мне карандаш и бмагу с полосками и квадратиками. С одной стороны было написано СТАРТ а с другой стороны написано ФИНИШ. Они сказали что это л а б е р и н т и что мы с Элджерноном должны сделать один и тотже л а б е р и н т. Я непонял как мы можем делать один и тотже л а б е р и н т если у меня была бумага и у Элджернона коробка но я ничево не сказал. Да и времени небыло потомучто начались состязания.

У одного мущины были часы которые он хотел от меня спрятать поэтому я старался несмотреть туда и начал изза этаво валнаватца.

От этаво испытания мне было хуже чем от всех других потомучто они повторяли его 10 раз с разными л а б е р и н т а м и и Элджернон всегда выигрывал. Я незнал что мыши такие умные. Может это потому что Элджернон белый. Может белые мыши умнее чем другие.

4. атчет о праисходящем — 8 мар

Они будут меня использывать! Я так влнуюсь что почти немогу писать. Сперва доктор Немюр и доктор Штраусс паспорили об этом. Доктор Немюр был в кабинете когда меня туда привел доктор Штраусс. Доктор Немюр незнал использывать меня или нет но доктор Штраусс сказал ему что мисс Кинниен рикаминдавала меня самым лучшим из всех каво она учит. Мне нравица мисс Кинниен потомуто она очинь умная учительница. И она сказала Чарли у тебя будет еще один шанс. Если ты дабровольно согласишся на этот экспирамент может ты станеш умным. Они незнают это будет навсегда или нет но есть шанс. Поэтому я сказал ладно хотя и очень боялся потомучто она сказала что мне будут делать апирацию. Она сказала небойся Чарли ты сделал такие большие успехи с такими малинькими спасобнастями что я думаю ты заслужил это больше всех.

Поэтому я испугался кгда доктор Немюр и доктор Штраусс об этом паспорили. Доктор Штраусс сказал что у меня есть чтото очинь хорошее.

Он сказал доктор Немюр Чарли не такой каким вы представляете себе перваво из ваших новых интелек... (немог разабрать слово) сюперменов. Но большинство людей таковаже низкаво уровня интелек... вражд... и необщит... они обычно тупы апатич... и с ними трудно иметь дело. У нево хороший характир он заинтирисован и сготовностью идет навстречу.

Доктор Немюр сказал незабывайте что он будет первым человичиским сущиством интилект котораво устроитца врезультате хирургичискаво вмишатильства.

Доктор Штраусс сказал правильно. Поглядите как он хорошо научился читать и писать для своево низкаво умствинаво уровня это такоеже великое достиж... как еслибы мы с вами без всякой помощи изучили тиорию... ности эйнштина.

Я понял не все слова они говорили слишком быстро но похоже доктор Штраусс был за меня а другой нет.

Потом доктор Немюр кивнул он сказал ладно можетбыть вы правы. Мы используем Чарли. Кгда он так сказал я очинь развалнавался я вскачил и пжал ему руку за то что он такой добрый ко мне. Я сказал ему спасибо док вы не пожалеите что дали мне еще один шанс. И я это сказал чесно. После апирации я обязатильно пастараюсь стать умным. Я буду ужас как старатца.

5. атчет о праисходящ — 10 мар

Мне страшно. Многие люди которые здесь работают и сестры и те которые делали мне испытания принесли мне конфеты и пажелали мне удачи. Я надеюсь что мне повезет.

Я спрасил доктора Штраусса смогу я после апирации победить Элджернона и он сказал может быть. Если апирация получица я докажу этой мышке что я могу быть такимже умным. А может даже умнее. Я смогу лучше читать и правильно писать слова буду знать много разных вещей и буду как дргие люди. Я хочу быть умным как другие. Если это останеца навсегда они сделают умными всех на свете.

6. отчет о происходящем — 15 мар

От апирации мне было больно. Он ее сделал когда я спал. Они севодня сняли у меня с головы и глаз бинт и я могу писать о т ч е т о п р о и с х о д я щ е м. Доктор Немюр который видел мои другие отчеты говорит что я пишу слово о т ч е т неправильно и он показал как ево нужно писать и слово п р о и с х о д я щ е м т о ж е. Я должен постаратца это запомнить.

Я очинь плохо запоминаю как нужно правильно писать. Доктор Штраусс говорит мне нужно писать все что со мной случаица но он говорит я должен расказывать больше что я думаю и чуствую.

Когда я сказал ему я неумею думать он сказал папробуй. Пока у меня на глазах был бинт я все время старался думать. Ничево неполучилось. Я незнаю о чем думать. Можетбыть если я спрашу ево он мне скажет как я должен это делать ведь теперь мне полагаеца стать умным. О чем думают умные люди. Наверно чтонибудь придумывают. Я бы хотел уже уметь придумывать.

7. отчет о происходящем — 19 мар

Все тоже самое. Мне делали много испытаний и разные состязания с Элджерноном. Я ненавижу эту мыш. Она мня всегда обыгрывает. Доктор Штраусс сказал что я должен играть в эти игры. И еще он сказал что мне скоро опять придеца пройти эти испытания. Эти кляксы психованые. И те картинки тоже психованые. Мне нравица рисовать мущину и женщину но я нестану врать о людях.

Я так сильно стараюсь думать что у меня заболела голова. Я думал доктор Штраусс мой друг а он мне непомогает. Он мне неговорит о чем думать или когда я стану умным.

8. отчет о происходящем — 23 мар

Я иду обратно работать на фабрику. Они сказали это лучше чтобы я снова начал работать но мне нельзя никому говорить для чево мне делали апирацию и я должен каждый вечер после работы на час приходить в бальницу. Они собираюца мне платить деньги каждый месяц чтобы я учился быть умным.

Я рад что я возвращаюсь на фабрику потомучто я скучаю по моей работе и по всем моим друзьям и по нашим развлечениям.

Доктор Штраусс говорит что я должен продолжать записывать разные вещи но мне ненужно это делать каждый день а только когда я о чемнибудь думаю или когда случаица чтонибудь особенное. Он говорит непадай духом потомучто на это нужно время и это идет медлено. Он сказал что прошло много времени пока Элджернон стал в 3 раза умнее чем раньше. Значит Элджернон меня всегда обыгрывает потому что у нево тоже была такая апирация. Мне от этаво легче. Можетбыть я смогу делать этот л а б е р и н т быстрее чем простая мыш. Может когданибудь я обыграю Элджернона. Вот будет здорово. Пока похоже что Элджернон останеца умным навсегда.

25 мар (мне больше ненужно писать наверху ОТЧЕТ О ПРОИСХОДЯЩЕМ только когда я отдаю это раз в неделю доктору Немюру чтобы он прочел. Мне нужно только ставить число. Это сохраняет время).

У нас на фабрике было севодия очинь весело. Джо Керп сказал а нука посмотрим где у Чарли была апирация что они сделали как они добавили Чарли мозгов. Я захотел расказать ему но вспомнил что доктор Штраусс сказал нельзя. Потом Френк Рейлли сказал что ты делал Чарли давай поднатужся и выкладывай. От этаво мне стало смешно. Они мои настоящие друзья и они меня любят.

Ингда ктонибудь скажет эй посмотрите на Джо или Френка или Джорджа какова он свалял Чарли Гордона. Я незнаю почему они так говорят но они всегда смеюца. Севодня утром Эмос Борг который у Доннегана 4 человек называл мое имя когда кричал на рассыльного Эрни. Эрни Ìатерял пакет. Он сказал черт возьми Эрни ты что строиш из себя Чарли Гордона. Я непонимаю почему он так сказал. Я никогда нетерял никаких пакетов.

28 мар. Севодня вечером ко мне домой пришел доктор Штраусс чтобы узнать почему я не зашел туда как мне положено. Я сказал ему что мне больше ненравица играть с Элджерноном. Он сказал что пока мне это ненужно делать но я должен приходить. Он принес мне подарок только это не подарок а взаймы. Я подумал что это малинький телевизор но это нетак. Он сказал я должен его включать когда ложусь спать. Я сказал вы шутите почему я должен его включать когда я иду спать. Где это слыхано. Но он сказал что если я хочу стать умным я должен его слушатца. Я сказал ему я недумаю что становлюсь умным а он положил мне руку на плечо и сказал Чарли ты еще этаво незнаеш но ты все время становишся умнее. Ты пока этаво небудеш замичать. Мне кажеца что он просто был добрым чтобы меня успокоить потомучто я совсем невыгляжу умнее.

Ах да чуть не забыл. Я спрасил когда я смогу вернутца в школу в клас к мисс Кинниен. Он ответил что я туда больше непойду. Он сказал что мисс Кинниен скоро будет приходить в бальницу чтобы учить меня отдельно. Я очинь на нее сердился что она непришла навестить меня когда мне сделали апирацию но я ее люблю и можетбыть мы опять подружимся.

29 мар. Я всю ноч не спал изза этаво психованава телевизора. Как я могу заснуть когда всю ноч мне в уши орут какието психованые слова. И эти дурацкие картинки. Жуть. Я непонимаю что там говорят когда я несплю как же я пойму это во сне.

Доктор Штраусс говорит все в порядке. Он говорит что мои мозги учаца когда я сплю и это мне поможет когда мисс Кинниен начнет со мной уроки в бальнице (только я теперь знаю что это не бальница а лабатория). Я думаю это все чепуха. Если можно поумнеть во сне зачем люди ходят в школу. Я не думаю что чтонибудь из этаво получица. Я всегда смотрю позднюю и препозднюю программу по телевизору и это совсем несделало меня умнее. Может нужно спать когда ее смотриш.

9. отчет о происходящем — 3 апреля

Доктор Штраусс показал мне как сделать у телевизора звук потише и теперь я могу спать. Я ничево не слышу. И я до сих пор непонимаю что он там говорит. Иногда утром я снова включаю ево чтобы посмотреть что я выучил когда спал и я думаю что ничево. Мисс Кинниен говорит может это на другом языке или еще что. Но почти всегда он похож на американский. Телевизор говорит так быстро даже быстрее чем мисс Голд которая была моей учительницей в 6 класе а я помню она говорила так быстро что я немог ничево понять.

Я сказал доктору Штрауссу что хорошево стать умным во сне. Я хочу быть умным когда я несплю. Он говорит это одно и тоже.

Но голова у меня болит от вечиринки. Мои друзья с фабрики Джо Керп и Френк Рейлли пригласили меня пойти с ними в салун Магги чтонибудь выпить. Я нелюблю выпивать но они сказали что нам будет очинь весело. Я хорошо провел время.

Джо Керп сказал что я должен показать девушкам как я на фабрике мою пол в уборной и он принес мне тряпку. Я показал и все засмиялись когда я сказал что мистер Доннеган говорит что я самый лучший уборщик из всех каво он имел за все время потомучто я люблю свою работу и хорошо с ней справляюсь никогда не опаздываю и непрогулял ни одново дня только когда мне делали апирацию.

Я сказал что мисс Кинниен всегда говорила Чарли гордись своей работой потомучто ты с ней хорошо справляешся.

Все смиялись нам было весело и они дали мне много выпить а Джо сказал ну и тип этот Чарли когда наклюкаетца. Я незнаю что это значит но все меня любят и нам весело. Я немогу дождатца пока стану таким умным как мои лучшие друзья Джо Керп и Френк Рейлли.

Я непомню как кончилась вечиринка но мне кажеца я вышел купить газету и кофе для Джо и Френка и когда я вернулся там никаво их небыло. Я искал их везде допозна. Что потом я помню не так хорошо но мне кажеца я захотел спать или заболел. Какойто добрый полицейский привел меня домой. Так говорит моя квартирная хозяйка миссис Флинн.

Но у меня болит голова и на ней большая шишка и кругом синяки. Я думаю может я упал но Джо Керп говорит это работа полицейскаво они иногда бьют пьяных. Я так недумаю. Мисс Кинниен говорит что полицейские должны помогать людям. А все таки у меня очинь болит голова меня тошнит и все у меня болит. Я думаю что я больше никогда небуду пить.

6 апреля. Я победил Элджернона! Я даже незнал что я победил ево пока мне несказал лаборант Берт. А во второй раз я проиграл потомучто я так валнавался что упал со стула когда еще не кончил. Но потом я победил ево еще 8 раз. Должно быть я становлюсь умным если победил такую умную мыш как Элджернон. Но я не чуствую себя умнее.

Я хотел еще соревноватца с Элджерноном но Берт сказал на один день хватит. Мне разрешили его минутку подержать. Он не такой уж плохой. Он мягкий как ватный шарик. Он моргает и когда открывает глаза они черные а покраям розовые.

Я сказал что могу покормить ево потомучто мне было неприятно что я победил ево а я хочу быть добрым и со всеми дружить. Но Берт сказал нельзя Элджернон совсем особиная мыш с такой же апирацией как у меня и он первый из всех животных так долго остался умным. Он сказал Элджернон такой умный что каждый день должен решать задачу чтобы получить еду. Это вроде замка на двери который меняют когда он заходит внутрь чтобы поесть поэтому он каждый раз должен выучить чтонибудь новое чтобы получить свою еду. Мне стало ево жалко потомучто если он несможет учитца будет голодным.

Я думаю это неправильно заставлять кавонибудь проходить испытание за еду. Как бы это понравилось доктору Немюру еслибы он должен был проходить испытание каждый раз когда ему захочеца кушать. Я думаю что мы с Элджерноном будем друзьями.

9 апреля. Севодня после работы в лабаратории была мисс Кинниен. Она вроде была рада меня видеть но какбудто чевото боялась. Я сказал ей мисс Кинниен невалнуйтесь я еще не умный и она расмиялась. Она сказала я верю в тебя Чарли как ты изо всех сил старался читать и писать лучше всех других. Сперва ты будешь занимаца понемножку и ты сделаешь коечто для науки.

Мы читаем очинь трудную книжку. Я никогда раньше нечитал такой трудной книжки. Она называеца Робинзон Крузо об одном человеке который пападает на необитаемый Остров. Он умный и придумывает разные штуки чтобы иметь дом и еду и он хорошо плавает. Только мнеево жалко потомучто он совсем один и у нево нет друзей. Но мне кажеца на острове есть ктото еще потомучто там есть картинка как он со своим смешным зонтиком смотрит на следы ног. Я надеюсь у нево будет друг и он небудет одиноким.

10 апреля. Мисс Кинниен учит меня писать лучше. Она говорит посмотри на слово закрой глаза и повторяй его много много раз пока не запомниш. Мне очень трудно со словом кажется которое говорят кажеца и со словом сегодня которое говорят севодня.

14 апреля. Я кончил Робинзона Крузо. Мне хочется узнать что с ним еще случится но мисс Кинниен говорит это все. Почему.

15 апреля. Мисс Кинниен говорит что я учусь быстро. Она прочла некоторые из моих сообщений и както страно посмотрела на меня. Она говорит что я хороший человек и я им всем докажу. Я спросил ее почему. Она сказала неважно но мне не нужно огорчатся если я пойму что все не такие хорошие как я думаю. Она сказала такой человек как ты которому бог дал так мало сделал больше чем многие умные люди которые никогда даже не используют свои мозги. Я сказал что все мои друзья умные люди но они хорошие. Они меня любят и никогда ничего плохого не сделали. Тут ей чтото попало в глаз и она побежала в туалет.

16 апр. Сегодня, я выучил запятую, вот она какая (,) точка с хвостиком, мисс Кинниен, говорит что это важно, потому что, запятая, делает, написанное, лучше.

17 апр. Я ставил запятые неправильно. Это знак препинания. Мисс Кинниен велела мне смотреть в словаре длиные слова чтобы я научился их писать. Я спросил зачем если их можно читать. Она сказала это входит в твое обучение поэтому теперь я буду смотреть все слова когда я неуверен как их нужно писать. Из за этого приходится писать долго но мне кажется что я запоминаю. Мне нужно посмотреть только один раз и я уже знаю как писать. Поэтому я правильно написал слово препинание. (Оно так написано в словаре.) Мисс Кинниен говорит что точка тоже знак препинания и что есть еще много других знаков которые нужно выучить.

Нужно все знаки употреблять вместе, она показала? Мне «как, это делать, и теперь; я могу! употреблять вместе все» знаки препинания, когда! пишу? Есть множество! правил? которые нужно? выучить; но я их дер'жу в голове.

Мне нравится, в Дорогой мисс Кинниен (так нужно писать в деловом письме если я когда нибудь стану деловым человеком) что она, всегда мне ' все об'ясняет» когда — я спрашиваю. Она ге'ний! я бы хотел! быть таким, умным» как она;

(Знаки, препинания; смешные!)

18 апр. Какой же я болван! Ведь я даже не понял, о чем она говорила. Вчера вечером я прочел учебник грамматики, и там все об'ясняется. Потом до меня дошло, что мисс Кинниен пыталась мне об'яснить то же самое, но я тогда не понял. Я встал посреди ночи, и у меня в голове все прояснилось.

Мисс Кинниен сказала, что мне помог телевизор, который работает, когда я сплю.

(Продолжение следует)

Движенья — нет?

(Начало см. на с. 36)

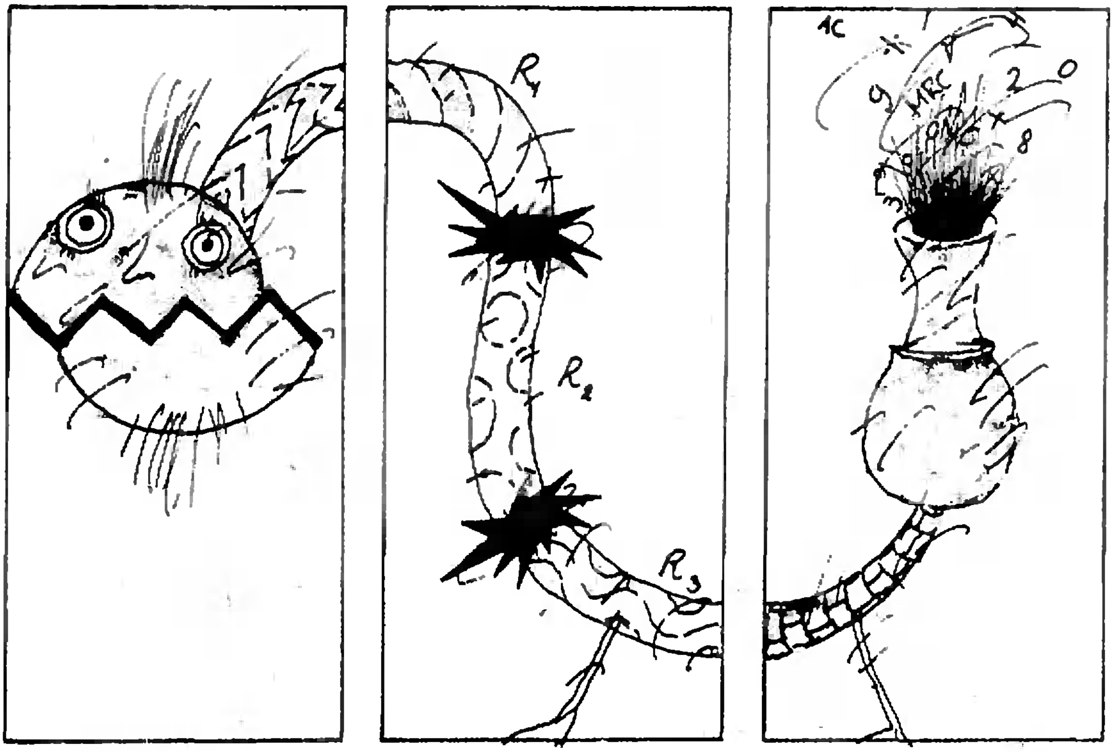
Так что — спокойно. Движение есть.

Честно говоря, квантовую механику я недолюбливал. Не очень понятная. Да и применима где-то уж очень глубоко в физике. Но уж если она на таком уровне себя проявила, что даже школьнику понятно, то я ее зауважал.

А Зенон-то каков? Это он, оказывается, намеки делал. Апория кучи — намек на теорию вероятностей и теорию нечетких множеств. Эти три апории — намек на интегральное и дифференциальное исчисления, бесконечные ряды, квантовую механику. Хороший мужик, уважаю.

Как сказал Пушкин: «... И гений, парадоксов друг».

К. Окунев



Школа в „Кванте"

Физика 9, 10, 11

Публикуемая ниже заметка «Что произойдет, если исчезнет трение?» предназначена девятиклассникам, заметка «Об электрическом сопротивлении проводников» — десятиклассникам, «Компьютер — в холодильнике?!» — десяти- классникам и одиннадцатиклассникам. Впрочем, первую заметку мы рекомендуем прочитать всем старшеклассникам. И вот почему.

Несмотря на вездесущность трения в окружающем нас мире и кажущуюся простоту законов сухого трения, физика трения на микроскопическом уровне до конца не ясна и сегодня. Время от времени в научных журналах появляются статьи, в которых на основании той или иной модели из фундаментальных принципов физики выводятся опытные законы сухого трения. Заметку «Что произойдет, если исчезнет трение?» написали школьники. Они предлагают свою простую модель этого явления, отражающую многие его свойства и особенности.

Что произойдет, если исчезнет трение?

Как показывают оценки, на преодоление трения и его разрушительных последствий человечество тратит примерно 5—10 % всей совершаемой им работы. Если же трение исчезнет, то в машинах, станках, двигателях и других различных устройствах, участвующих в современных производственных процессах, уменьшатся потери энергии, износ, шум.

Но, вместе с тем, если исчезнет трение, то... наступит хаос. Движущиеся поезда, автомобили, велосипеды, трамваи не смогут остановиться, а покоящиеся — не смогут тронуться с места. Беспомощно будут барахтаться пешеходы, сползая вместе с припаркованными автомобилями и другими предметами по уклонам улиц. Развяжутся узлы на всех нитках и веревках. Сами собой начнут раскручиваться гайки и выпадать шурупы. Обвиснут струны роялей, гитар. Смычки перестанут извлекать звуки из скрипок, альтов, виолончелей...

Но может ли исчезнуть трение? Что значит «трение отсутствует»? Что такое, наконец, сила трения? Об этом и пойдет речь в заметке.

Как известно, сила трения (точнее — сила сухого трения) F определяется коэффициентом трения k, зависящим от рода веществ, из которых сделаны трущиеся тела, и качества обработки их поверхностей, и силой N нормального давления одного тела на другое:

$$F=kN.$$

Представим себе, что у всех окружающих нас тел любой малый участок поверхности абсолютно гладкий, т. е. $k_i=0$. Тогда при любой величине силы N_i, действующей на этот участок, $F_i=0$. Очевидно, что это и означало бы, что трение *как свойство вещества* исчезло.

Однако оказывается, что даже если трение как свойство вещества исчезнет, сила трения между телами, тем не менее, может проявляться. Для того чтобы это пояснить, рассмотрим пример.

Изготовим из вещества, не обладающего трением, два тела, у которых соприкасающиеся поверхности имеют одинаковые бороздки с сечением в виде равнобедренных треугольников с углом при основании α, длиной основания $2l$ и высотой h (рис. 1). Пусть масса верхнего тела равна m и, соответственно, сила нормального давления верхнего тела на нижнее равна $N=mg$. Приложим к верхнему телу вдоль горизонтальной плоскости, «осредняющей» бороздки, силу F и будем пытаться с помощью этой силы медленно сдвинуть верхнее тело относительно нижнего. Понятно, что когда верхнее тело переместится по горизонтали на величину l, его центр тяжести поднимется на высоту h и тело приобретет потенциальную энергию

$$E_p=mgh.$$

При этом сила F совершит работу

$$A=Fl.$$

Согласно закону сохранения механической энергии,

$$E_p=A, \text{ или } mgh=Fl,$$

откуда

$$F=\frac{h}{l}mg.$$

Обозначим отношение h/l через k, учтем, что $mg=N$, и получим

$$F=kN.$$

Отсюда видно, что для того чтобы в условиях отсутствия трения одно тело начало движение по поверхности другого, надо приложить силу, величина которой определяется точно так же, как и величина силы трения.

Таким образом, предположение о том, что трение как свойство вещества исчезло, не привело к исчезновению силы трения. При этом коэффициент трения оказывается зависящим только от геометрических параметров неровностей на поверхности соприкасающихся тел.

Безусловно, всем хорошо известна задача, в которой смысл коэффициента трения иллюстрируется с помощью наклонной плоскости и находящегося на ней тела. Если менять угол наклона плоскости к горизонту, начиная от нуля, то коэффициент трения будет равен тангенсу такого угла α_0, при котором лежащее на плоскости тело начнет соскальзывать. Но и в рассмотренном нами идеализированном примере отсутствия трения как свойства вещества движение тела на наклонной плоскости начинается с углов α_0, для

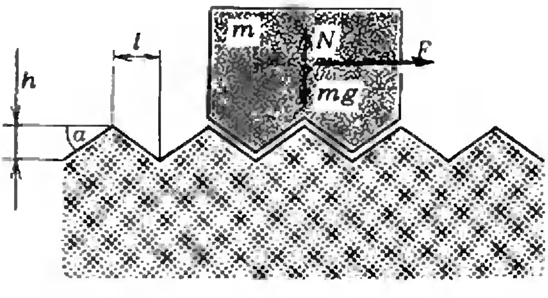


Рис. 1.

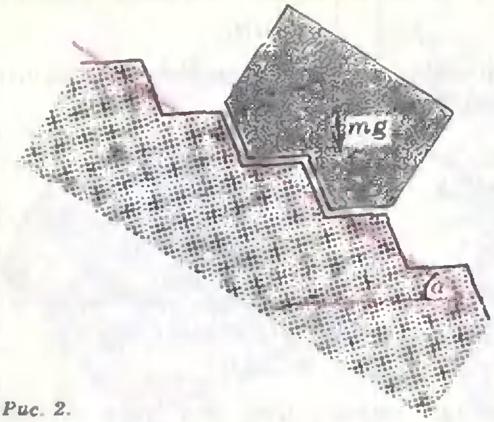


Рис. 2.

которых $\operatorname{tg}\alpha_0 = h/l$ (рис. 2). Значит, опять коэффициент трения равен тангенсу угла наклона поверхности контакта тел, при котором одно тело начинает движение по поверхности другого.

Вернемся, однако, к нашему первому примеру (см. рис. 1). В действительности сила трения существует не только в начале движения, поэтому рассмотрим, что будет происходить с нашими идеальными телами, когда их взаимное перемещение по горизонтали станет больше l. Верхнее тело, поднявшись на гребень бороздки, начнет опускаться вниз, его потенциальная энергия будет переходить в кинетическую, а в конце спуска произойдет удар о восходящую грань следующей бороздки. Если при этом опять окажется возможным полное преобразование кинетической энергии в потенциальную, т. е. будет возможен подъем верхнего тела на гребень следующей бороздки, то дальнейшее движение верхнего тела сможет осуществляться без приложения дополнительной силы. А это и будет означать, что сила трения исчезла. Если же этого не произойдет, то, несмотря на полное отсутствие трения как свойства вещества, сила трения сохранится.

Рассмотрим подробнее изменение скорости верхнего тела при ударе о грань следующей бороздки (рис. 3). Будем считать, что условия идеальные и при ударе нет потерь энергии (т. е. происходит абсолютно упругий удар). В таком случае справедлив известный закон: угол падения равен углу отражения; при этом углы отсчитываются от перпендикуляра к поверхности, с которой происходит соударение, т. е. от перпендикуляра к восходящей грани бороздки в нашем случае (см. углы γ на рисунке 3).

Обозначим скорость в конце спуска через $\vec{v}_1$ (она направлена вдоль плоскости спуска с бороздки), а скорость после удара — через v_2. Разложим эти скорости на составляющие вдоль осей X и Y, направленных по горизонтали и по вертикали соответственно*):

$$v_{1x} = v_1 \cos\alpha,\quad v_{1y} = v_1 \sin\alpha,$$
$$v_{2x} = v_2 \cos\varphi,\quad v_{2y} = v_2 \sin\varphi.$$

Из рисунка 3 найдем соотношение между углами α и φ:

$$\varphi = \pi - \alpha - 2\gamma,$$
$$\gamma = \pi - \pi/2 - 2\alpha = \pi/2 - 2\alpha,$$

откуда

$$\varphi = 3\alpha.$$

Воспользуемся известными из справочников формулами тригонометрии

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$
$$\sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha,$$
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

и запишем отношения соответствующих проекций скоростей после удара и до него:

$$\frac{v_{2x}}{v_{1x}} = \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} = 1 - 4\sin^2\alpha,$$

$$\frac{v_{2y}}{v_{1y}} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = -(1 - 4\cos^2\alpha).$$

В условиях сохранения энергии верхнее тело после удара о нижнее поднимется в точности на гребень следующей бороздки только в том случае, если вектор скорости $\vec{v}_2$ будет направлен вверх по плоскости бороздки, а величина скорости останется такой же, как и до удара. Этому отвечает условие

$$\frac{v_{2x}}{v_{1x}} = 1 \text{ и } \frac{v_{2y}}{v_{1y}} = -1.$$

Но, в силу приведенных выше формул, это возможно только при $\alpha = 0$, т. е. когда поверхности соприкасаю-

*) На рисунке 3 допущена неточность: угол φ, как и угол α, должен отсчитываться от горизонтали. (*Примеч. ред.*)

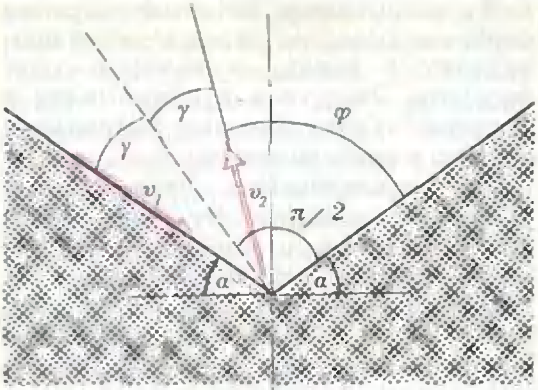


Рис. 3.

щихся тел абсолютно гладкие, без всяких бороздок! Во всех остальных случаях невозможно полное преобразование кинетической энергии в потенциальную такое, чтобы затем верхнее тело могло неограниченно продолжать свое движение без приложения внешней силы. Если, например, $v_{2x}/v_{1x}=1-4\sin^2\alpha<0$, т. е. $\alpha>\pi/6$, то компонента v_{2x} направлена навстречу движению, поэтому сила F должна не только компенсировать потери кинетической энергии при ее преобразовании в потенциальную, но и совершать работу, бо́льшую, чем в начале движения.

Из рассмотренного примера возникает парадоксальный вывод: если трение как свойство вещества и может исчезнуть, то это не приведет к исчезновению силы трения, включая и ее характерную особенность — различие в величине силы трения в начале движения и при его продолжении. Останутся также и такие сопутствующие трению явления, как шум из-за ударов неровностей друг о друга и разрушение поверхностей тел (если, например, сломать выступы бороздок окажется легче, чем подняться по ним вверх). Наконец, самое интересное следствие состоит в том, что сохраняется зависимость силы трения между телами от того, из какого вещества они изготовлены, так как при одинаковом способе механической обработки поверхностей форма неровностей для разных веществ может быть различной.

В. Асаян, И. Хазен

Об электрическом сопротивлении проводников

Как вам, безусловно, известно, электрическое сопротивление проводника зависит от материала, из которого он изготовлен, от размеров и формы проводника. Так, например, для однородного проводника постоянного сечения S и длиной l сопротивление

$$R=\rho\frac{l}{S}, \quad (1)$$

где ρ — удельное электрическое сопротивление. Иногда бывает удобнее говорить не о сопротивлении проводника, а об обратной ему величине — электрической проводимости.

Первым физиком, попытавшимся выяснить количественные закономерности прохождения постоянного электрического тока через проводники, был скромный школьный учитель из Кельна Георг Симон Ом (1789—1854). Результаты своих первых опытов Ом опубликовал в 1826 году.

Разумеется, в распоряжении Ома не было современных нам высокоточных электроизмерительных приборов и надежных источников тока, поэтому Ому по ходу дела пришлось решить целый ряд сложных практических задач.

Так, в качестве источников тока в своих первых опытах Ом использовал вольтовы столбы — чередующиеся слои двух разнородных металлов (например, серебра и цинка), разделенных бумагой, пропитанной раствором соли. При этом он заметил, что сила тока в гальванической цепи со временем заметно убывает. Ясно, что в таких условиях было почти бессмысленно заниматься установлением каких-либо количественных закономерностей. Когда же Ом познакомился с работами Зеебека (Томас Иоганн Зеебек (1770—1831) — немецкий физик), открывшего в 1821 году термоэлектрический эффект, то стал использовать в своих опытах термоэлемент, дающий достаточно стабильный ток. В установке Ома, схема которой изобра-

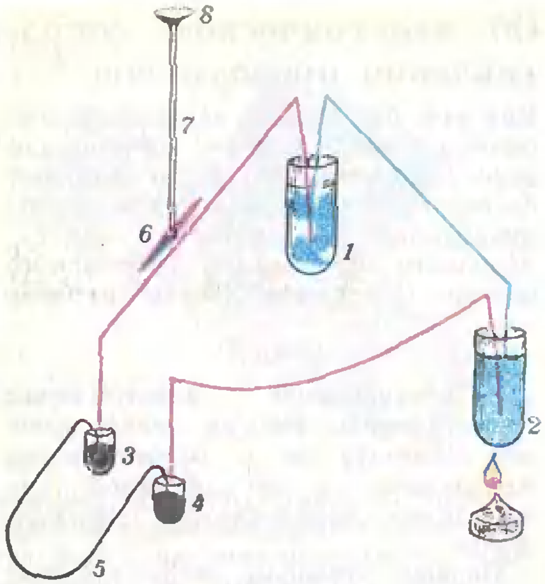


Рис. 1.

жена на рисунке 1, использовался термоэлемент, состоящий из висмутого стержня, спаянного с двумя медными проводами. Спай *1* поддерживался при температуре таяния льда, а спай *2* — при температуре кипения воды. Свободные концы *3* и *4* проводов были погружены в чашечки со ртутью. Сюда же погружались и предварительно зачищенные для лучшего контакта концы исследуемых проволок *5*.

Узнав об опытах Эрстеда (Ханс Кристиан Эрстед (1777—1851) — датский физик), обнаружившего в 1820 году действие электрического тока на магнитную стрелку, Ом решил характеризовать силу тока величиной угла отклонения магнитной стрелки, находящейся около проводника с током. Для этого проводник помещался в плоскости магнитного меридиана (см. рис. 1), в отсутствие тока в проводнике магнитная стрелка *6* располагалась над ним и была параллельной ему, а слегка сплющенная проволока *7*, к которой подвешивалась стрелка, деформирована не была. При протекании тока через проводник магнитная стрелка выходила из плоскости магнитного меридиана и закручивала подвес. Ом поворачивал головку *8*, где был закреплен верхний конец подвеса, так, чтобы стрелка снова оказывалась параллельной проводнику с током, и измерял угол поворота. Этот угол и принимался в качестве характеристики магнитного действия электрического тока.

Для исследования проводимости различных металлов Ом брал проволоки одинакового поперечного сечения, но изготовленные из различных материалов, и поочередно включал их в цепь. В качестве эталона он выбрал медную проволоку определенной длины, приняв ее проводимость за 1000 условных единиц, и измерил угол поворота головки, при котором магнитная стрелка становилась параллельной проводнику с током. Затем включал в цепь проволоки из других металлов и укорачивал их до тех пор, пока угол поворота головки не становился таким же, как и в случае эталонной проволоки. По полученной при этом длине можно было судить о проводимости соответствующего материала. Таким образом Ом нашел, что проводимость золота составляет 574 условных единицы, серебра — 356, цинка — 333 и т. д.

Затем Ом исследовал проволоки из одного и того же металла, но различной толщины, и поступал с ними так же, как при определении проводимости различных металлов. Он нашел, что сопротивления проволок из одного и того же материала одинаковы, если отношения их длин равны отношениям площадей их поперечных сечений, т. е. если отношения l/S у этих проволок одинаковы. Впоследствии было установлено, что сопротивление R прямо пропорционально этому отношению: $R \sim l/S$. Вводя коэффициент пропорциональности ρ, зависящий от природы материала, можно для сопротивления проволоки записать соотношение (1). Покажем теперь, как, исходя из этого соотношения, можно получить известные вам формулы для подсчета общего сопротивления системы проводников, соединенных последовательно или параллельно.

Рассмотрим проводник постоянного поперечного сечения площадью S, изготовленный из какого-либо однородного материала с удельным сопротивлением ϱ. Обозначим его длину через l. Вообразим этот проводник состоящим из нескольких последовательно соединенных частей, например трех. Пусть их длины равны l_1, l_2 и l_3 (рис. 2). Очевидно, что

$$l=l_1+l_2+l_3.$$

Умножим обе части этого равенства на отношение ϱ/S:

$$\varrho\frac{l}{S}=\varrho\frac{l_1}{S}+\varrho\frac{l_2}{S}+\varrho\frac{l_3}{S}.$$

Но $\varrho l/S=R$ — сопротивление всего проводника, $\varrho l_1/S=R_1$, $\varrho l_2/S=R_2$ и $\varrho l_3/S=R_3$ — сопротивления его первой, второй и третьей частей соответственно. Таким образом,

$$R=R_1+R_2+R_3. \qquad (2)$$

Это и есть искомая формула для вычисления общего сопротивления при последовательном соединении проводников.

Теперь представим тот же проводник состоящим из нескольких, например опять же трех, параллельно соединенных частей с поперечными сечениями S_1, S_2 и S_3 (рис. 3). Аналогично предыдущему случаю,

$$S=S_1+S_2+S_3,$$

или, после умножения на общий множитель $1/(\varrho l)$,

$$\frac{S}{\varrho l}=\frac{S_1}{\varrho l}+\frac{S_2}{\varrho l}+\frac{S_3}{\varrho l}.$$

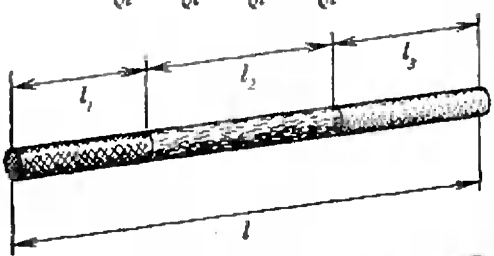


Рис. 2.

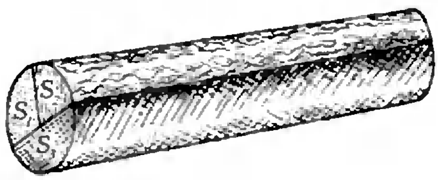


Рис. 3.

В соответствии с формулой (1),

$$\frac{S}{\varrho l}=\frac{1}{R},\ \frac{S_1}{\varrho l}=\frac{1}{R_1},\ \frac{S_2}{\varrho l}=\frac{1}{R_2}\ \text{и}\ \frac{S_3}{\varrho l}=\frac{1}{R_3},$$

поэтому получаем

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}. \qquad (3)$$

По этой формуле и можно найти общее сопротивление при параллельном соединении проводников.

Формулы (2) и (3) выведены здесь лишь для частного случая конкретного вида проводников — один и тот же материал, одинаковые поперечные сечения в первом случае и одинаковые длины во втором. Однако применимы они и для самых общих случаев.

М. Маринчук

Компьютер — в холодильнике?!

Каким вы представляете себе суперкомпьютер XXI века? Размером с небоскреб? Вряд ли. Так могли думать люди лет тридцать назад, когда появляющиеся электронные монстры работали на лампах или, в лучшем случае, на транзисторах и действительно занимали целые залы. Сегодняшние же компьютеры по размерам становятся все меньше и меньше.

Теперь самое время вспомнить, что при протекании по проводникам даже слабых токов выделяется джоулево тепло, происходит, как говорят, диссипация (рассеяние) энергии. Поэтому сверхминиатюризация неизбежно должна привести к перегреву и невозможности работы компьютера. Где же выход из этого тупика?

Одним из видимых сегодня путей является создание компьютеров следующих поколений на сверхпроводящих элементах, диссипация энергии в которых практически полностью отсутствует. О чудесном явлении протекания тока без сопротивления, называемом сверхпроводимостью, и пойдет речь в этой заметке.

Впервые о сверхпроводимости стало известно 28 апреля 1911 года, когда голландский ученый Г. Камерлинг-Оннес на заседании Королевской академии наук в Амстердаме сообщил о только что обнаруженном им поразительном эффекте — исчезновении электрического сопротивления ртутного образца, охлажденного с помощью жидкого гелия до рекордно низкой по тем временам температуры — до 4,15 К. Это явление резко противоречило сложившимся классическим представлениям об электронных свойствах металлов.

Сверхпроводимость стали интенсивно изучать. Вскоре выяснилось, что равенство нулю сопротивления сверхпроводника, по-видимому, выполняется не приблизительно, а строго (так, ток, возбужденный в сверхпроводящем кольце, мог циркулировать в нем годами, не изменяясь по величине). Обнаружились и другие удивительные свойства. Например — полное вытеснение магнитного поля из объема проводника при его переходе в сверхпроводящее состояние (это явление имеет место при не слишком сильных полях). Существенно расширился и ряд известных сверхпроводящих металлов. Перспективы практического применения обнаруженного явления казались безграничными: линии передачи энергии без потерь, сверхмощные магниты, сверхэнергоемкие аккумуляторы, новые виды транспорта...

Однако на пути реализации всех этих проектов стали два, непреодолимых, как казалось, препятствия. Первое — это чрезвычайно низкие температуры, при которых наблюдалась сверхпроводимость. Так, за 75 лет исследований во многих лабораториях мира критическую температуру — так называют температуру перехода вещества в сверхпроводящее состояние — удалось повысить лишь до 23 К. «Рекордсменом» стал в 1973 году сплав Nb_3Ge. Это обстоятельство делало нерентабельными почти все направления использования сверхпроводимости ввиду дороговизны необходимого для охлаждения дефицитного жидкого гелия.

Но было и второе препятствие — уже упоминавшаяся «боязнь» сверхпроводников проникновения в их объем магнитных полей. Причина такой «нелюбви» понятна — согласно закону электромагнитной индукции, проникновение поля привело бы к возникновению в сверхпроводнике бесконечно большого тока, который он пропустить просто не в состоянии. Однако, если «сверхпроводящие» токи возникнут в приповерхностном слое проводника, то своим магнитным полем они смогут полностью скомпенсировать внешнее поле. До определенного момента сверхпроводники так и «поступают», но затем «сдаются» и скачком переходят в нормальное, несверхпроводящее, состояние даже при низкой температуре (строго говоря, так ведут себя только так называемые сверхпроводники первого рода, но долгое время исследовались именно они, а о существовании иных просто не было известно). Это препятствие оказалось даже более неприятным, чем необходимость низких температур. И действительно, магнитное поле всегда сопутствует протеканию тока, следовательно, по сверхпроводнику невозможно пропустить достаточно большой ток, не разрушив при этом само сверхпроводящее состояние.

Несмотря на эти удручающие обстоятельства, ученые продолжали исследовать явление сверхпроводимости и накапливать данные о свойствах сверхпроводников. Неясным и загадочным оно оставалось на протяжении почти полувека. Лишь в 1957 году была создана последовательная микроскопическая теория, объяснившая удивительные свойства большинства из известных сверхпроводников. Явление сверхпроводимости оказалось связанным с возникновением в некоторых металлах своеобразного притяжения между электронами. Да, да, не удивляйтесь, именно притяжения, хотя электроны и одинаково заряженные частицы. Природа этого притяжения носит сугубо квантовый характер и тесно связана с взаимодействием электронов с окружающей их кристаллической решеткой. Благодаря такому притяжению, при достаточно низких температурах часть электронов в металле объединяются в так называемые куперовские пары (по имени их первооткрывателя Л. Купера). Они пребывают в особом квантовом состоянии, таком, что могут переносить электрический ток, не взаимодействуя при этом с кристаллической решеткой, а следовательно, не выделяя тепла.*) Для электронов, образующих куперовскую пару, взаимодействие с решеткой уже как бы реализовалось (объединением их в пару), и теперь они составляют «касту неприкасаемых». Удивительно, что размеры таких пар в атомном масштабе весьма велики — они могут достигать сотен и даже тысяч межатомных расстояний. Так что куперовскую пару следует представлять скорее не как двойную звезду, вращающуюся относительно ее центра масс, а как двух партнеров, которые вместе пришли на дискотеку, но, разделенные десятками других танцоров, танцуют в разных концах зала.**)

Создание теории сверхпроводимости послужило мощным импульсом к дальнейшим исследованиям этого явления. Примерно в то же время пало одно из двух главных препятствий на пути его практического применения — были открыты так называемые сверхпроводники второго рода, которые, частично впуская в себя магнитное поле (в виде отдельных вихрей), все же сохраняли свойство бездиссипативного протекания тока. Сверхпроводящие магниты пришли в лаборатории и на производство, однако их функционирование по-прежнему требовало дефицитного и дорогого жидкого гелия.

Высокотемпературная сверхпроводимость стала своеобразным Эльдорадо для физиков 60—80-х годов, но на протяжении длительного времени ее «поиски» оставались безрезультатными.

Открытый в 1973 году сплав Nb_3Ge с критической температурой $T=23$ К в течение 14 лет оставался рекордсменом, которому было еще очень далеко до желанного «азотного барьера», т. е. до возможности получения сверхпроводимости при охлаждении дешевым жидким азотом с температурой кипения (при атмосферном давлении) 77 К. И вот, в 1986 году весь мир (и, ввиду важности открытия, не только физический) облетела весть об открытии высокотемпературной сверхпроводимости. Обладателями этого свойства оказались керамические (!) соединения (вначале весьма капризные к способу их изготовления). Замечательно, что до тех пор все сверхпроводящие материалы в нормальном состоянии были металлами, хорошо проводящими электрический ток, керамические же вещества в нормальном состоянии проводили ток значительно хуже.

За короткое время критические температуры в новом классе сверхпроводников были подняты от 30 до 95 К, а затем и до 120—125 К. Сегодня явление сверхпроводимости при азотном охлаждении можно демонстрировать без особых ухищрений даже в школьном физическом кабинете.

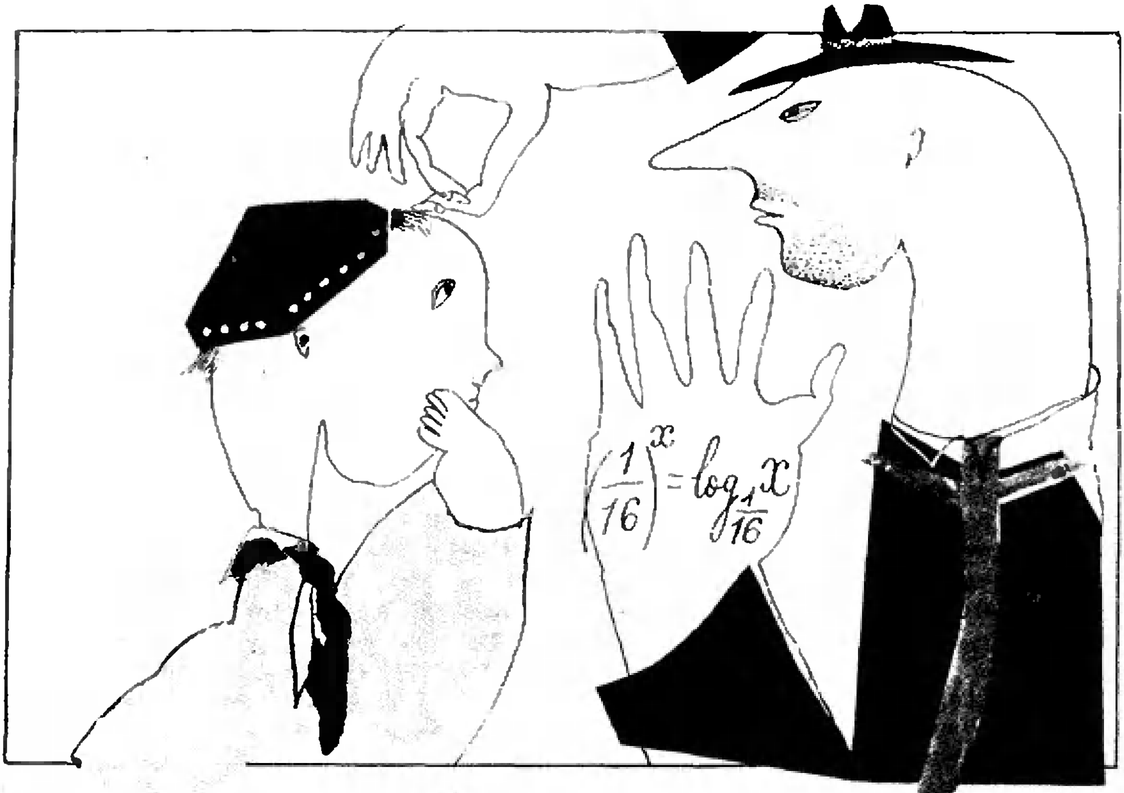
Похоже, что сверхпроводящий компьютер XXI века из мечты становится близким будущим. Важный шаг для этого уже сделан.

А. Варламов

---

*) См. заметку автора «Как в металле протекает электрический ток?» («Квант», 1988, № 3).

**) Это сравнение принадлежит одному из создателей теории сверхпроводимости Р. Шрифферу и приведено в статье академика А. Абрикосова «Сверхпроводимость: история, современные представления, последние успехи» («Квант», 1988, № 6).



Математический кружок

Об одном замечательном уравнении

Кандидат физико-математических наук
Ю. СИДОРОВ

Начнем с задачи, которую, по слухам, однажды предложили абитуриенту на устном вступительном экзамене.

Сколько корней имеет уравнение

$$\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}} x? \qquad (1)$$

Если нарисовать эскиз графиков функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$ при $0<a<1$ (рис. 1), может показаться, что эти графики обязательно пересекаются в одной точке, причем лежит эта точка на прямой $y=x$.

Однако непосредственно видно, что уравнение (1) имеет два корня: $x=\frac{1}{2}$ и $x=\frac{1}{4}$ (убедитесь в этом подстановкой), причем соответствующие этим корням точки пересечения графиков *не лежат* на прямой $y=x$. Таким образом, уравнение (1) имеет как минимум три корня.

Этот факт удивляет большинство выпускников средних школ и, к сожалению, очень многих учителей, хотя задача достаточно «старая» и часто приводится в качестве примера, показывающего, что графический способ решения уравнений нужно применять с большой осторожностью. Секрет неверного решения задачи прост: на рисунке 1 изображены очень грубые эскизы графиков и это привело к неверному выводу о числе корней уравнения (1).

На рисунке 2 изображены более точные графики, построенные с помощью ЭВМ. Из этого рисунка невозможно увидеть, сколько корней имеет уравнение (1), так как кривые не идеально тонкие и поэтому практически сливаются на некотором промежутке.

Графики на рисунке 3 также построены с помощью ЭВМ. На этом рисунке уже отчетливо видно, что уравнение

$$\left(\frac{1}{64}\right)^x=\log_{\frac{1}{64}} x$$

имеет ровно три корня.

Если с помощью ЭВМ построить те же графики $y=\left(\frac{1}{16}\right)^x$ и $y=\log_{\frac{1}{16}} x$, выбирая за единицу, например, 100 см, то, как и на рисунке 3, можно увидеть, что уравнение (1) имеет (у нас нет возможности поместить здесь рисунок, сделанный машиной) ровно три корня. Однако никакая ЭВМ не может построить идеально точные графики. Поэтому доказательствам с помощью только рисунка верить нельзя и необходимы строгие математические рассуждения.

Мы изучим общее уравнение:

$$a^x=\log_a x \qquad (2)$$

при различных значениях a (разумеется, здесь $a>0$, $a\neq 1$).

Заметим, что при любом a уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$a^{a^x}=x. \qquad (2')$$

Вместе с уравнением (2′) рассмотрим уравнение

$$a^x=x. \qquad (3)$$

Пусть x_0 — корень уравнения (3). Тогда $a^{a^{x_0}}=a^{x_0}=x_0$, т. е. x_0 является также корнем уравнений (2′) и (2).

Итак, *если уравнение* (3) *имеет хотя бы один корень, то уравнение* (2) *также имеет корни.*

Сделаем еще одно замечание. При $a>1$ функция $f(x)=a^x$ возрастает. Уравнение (2′) можно записать так: $f(f(x))=x$, а уравнение (3) при этом принимает вид $f(x)=x$.

Лемма. *Если функция $y=f(x)$ — возрастающая, то уравнения $f(f(x))=x$ и $f(x)=x$ равносильны.*

Доказательство. Пусть x_0 — корень уравнения $f(x)=x$. Тогда $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$, так что x_0 является корнем первого уравнения. Наоборот, пусть $f(f(x_0))=x_0$, причем $x_0\neq f(x_0)$. Тогда либо $x_0>f(x_0)$, либо $x_0<f(x_0)$, а так как функция f возрастает, получаем, что в первом случае $f(x_0)>f(f(x_0))=x_0$, а во втором случае $f(x_0)<f(f(x_0))=x_0$. Противоречие.

Из леммы и сделанных ранее замечаний следует, что при $a>1$ уравнение (2) эквивалентно уравнению $a^x=x$.

Упражнения

1. Решите уравнение

$$2\sqrt[3]{2x-1}=x^3+1.$$

2. При каждом значении a решите уравнение

$$\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x.$$

Исследование уравнения $a^x=x$

Сначала сформулируем одну замечательную теорему, о которой уже шла речь в журнале «Квант».

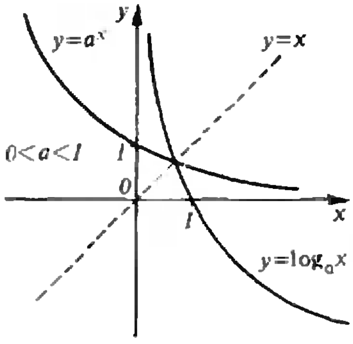


Рис. 1.

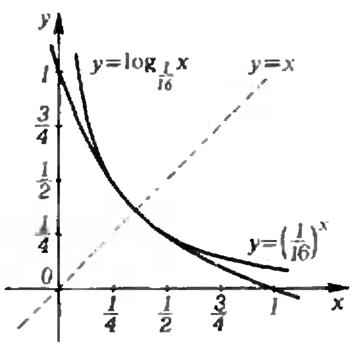


Рис. 2.

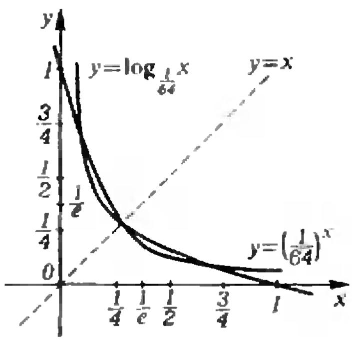


Рис. 3.

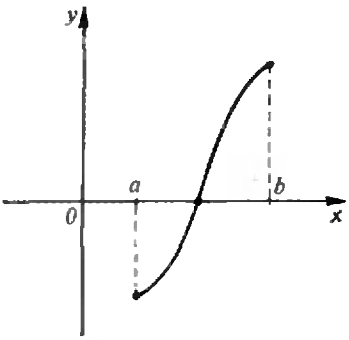


Рис. 4

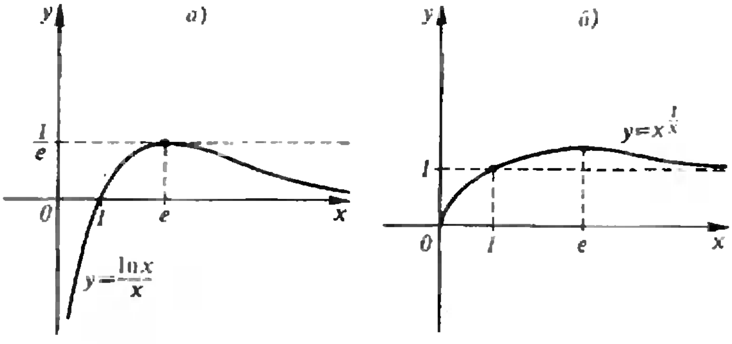


Рис. 5.

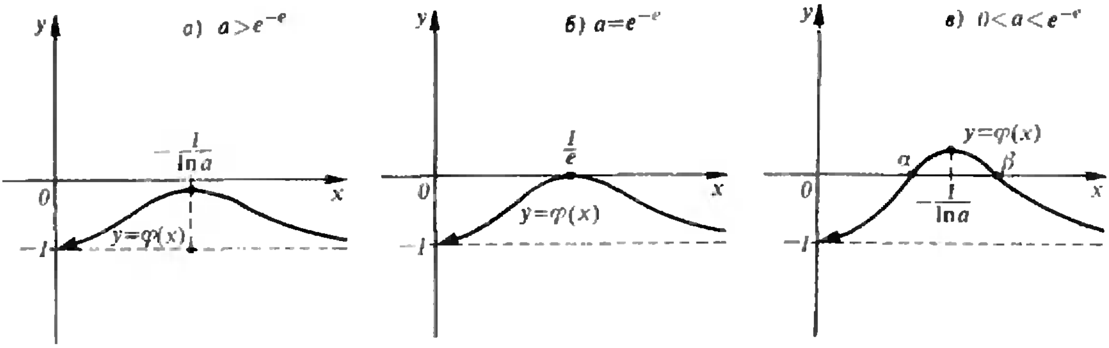


Рис. 6.

Теорема (Больцано — Вейерштрасса). *Если функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке* $[a; b]$, *причем* $f(a)<0$, $f(b)>0$, *то уравнение* $f(x)=0$ *имеет корень, принадлежащий интервалу* $(a; b)$.

Эта теорема доказывается в курсе математического анализа. Впрочем, смысл ее наглядно ясен: непрерывная кривая, показанная на рисунке 4, обязательно пересекает ось Ox. В дальнейшем мы будем неоднократно ею пользоваться.

В частности, если данная функция *возрастает* или *убывает* на отрезке $[a; b]$, то уравнение $f(x)=0$ имеет единственный корень принадлежащий промежутку $(a; b)$.

Теперь исследуем уравнение (3). Оно эквивалентно уравнению

$$\ln a=\frac{\ln x}{x}. \qquad (3')$$

Построим график функции $h(x)=\frac{\ln x}{x}$. Поскольку $h'=\frac{1-\ln x}{x^2}$, функция h возрастает при $x<e$ и убывает при $x>e$, а в точке $x=e$ достигает максимума, равного $\frac{1}{e}$ (рис. 5, *а*). Поэтому уравнение (3′) не имеет корней, если $\ln a>\frac{1}{e}$ (т. е. при $a>e^{\frac{1}{e}}$) и имеет единственный корень $x=e$ при $a=e^{\frac{1}{e}}$.

Упражнения

3. Докажите, что при $0<\ln a<\frac{1}{e}$, т. е. при $1<a<e^{\frac{1}{e}}$, уравнение (3′) имеет ровно два корня.

4. Пользуясь графиком рисунка 5, *а*, докажите, что график функции $y=x^{\frac{1}{x}}$ имеет вид, показанный на рисунке 5, *б*, и исследуйте уравнение $x^{\frac{1}{x}}=a$.

5. Постройте график функции $y=x^x$ и исследуйте уравнение $x^x=a$.

Итак, окончательно, при $1<a<e^{\frac{1}{e}}$ уравнение (2) имеет ровно два корня, при $a=e^{\frac{1}{e}}$ — один корень $x=e$ и не имеет корней при $a>e^{\frac{1}{e}}$.

Случай $0<a<1$

При $0<a<1$ уравнение $a^x=x$ имеет единственный корень x_0.

Рассмотрим функцию

$$f(x)=a^x-\log_a x$$

и изучим ее поведение. Для этого вычислим ее производную

$$f'(x)=a^x\ln a-\frac{1}{x\ln a}=\frac{xa^x\ln^2 a-1}{x\ln a}.$$

Рассмотрим теперь числитель полученной дроби $\varphi(x)=xa^x\ln^2 a-1$. Знаменатель ее отрицателен при всех $x>0$ и потому знак $f'(x)$ противоположен знаку $\varphi(x)$.

Упражнение 6. Докажите, что функция $\varphi(x)$ убывает при $x<-\frac{1}{\ln a}$, возрастает при $x>-\frac{1}{\ln a}$ и принимает свое наибольшее значение $\varphi_{\max}$ при $x=-\frac{1}{\ln a}$.

Из упражнения 6 следует, что если $\varphi_{\max}\leqslant 0$ при всех x, то функция $f(x)$ возрастает при всех $x>0$, так что x_0 является единственным корнем уравнения (2) (рис. 6, *а*, *б*).

Решая неравенство $\varphi_{\max}=-\frac{\ln a}{e}-1\leqslant 0$, получаем $a\geqslant e^{-e}$. Итак, при $e^{-e}\leqslant a<1$ уравнение (2) имеет ровно один корень $x=x_0$.

Если же $0<a<e^{-e}$, то $\varphi_{\max}>0$, а график функции φ имеет вид, показанный на рисунке 6, *в*. Для обоснования этого достаточно заметить, что $\varphi(0)=-1$, а $\varphi(1)<0$. Графики функции $f(x)=a^x-\log_a x$ при $e^{-e}<a<1$ и $a=e^{-e}$ показаны на рисунках 7, *а*, *б*.

Упражнение 7. Докажите, что $\varphi(1)=a\ln^2 a-1<0$ при $0<a<e^{-e}$. Указание. Найдите максимум функции $g(a)=a\ln^2 a$.

Из упражнения 7 следует, что функция $\varphi(x)$ равна нулю в двух точках α и β, причем $0<\alpha<-\frac{1}{\ln a}$, а $-\frac{1}{\ln a}<\beta<1$.

Это значит, что функция f возрастает при $x\in(0,\alpha)$, убывает при $x\in(\alpha;\beta)$ и снова возрастает при

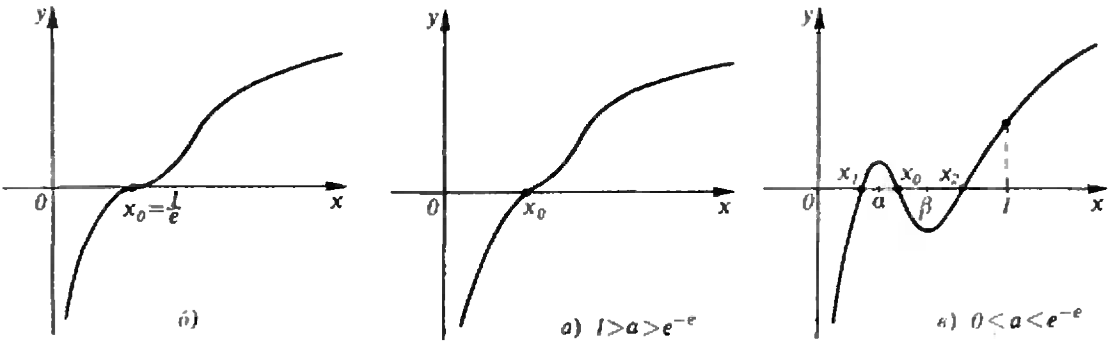


Рис. 7.

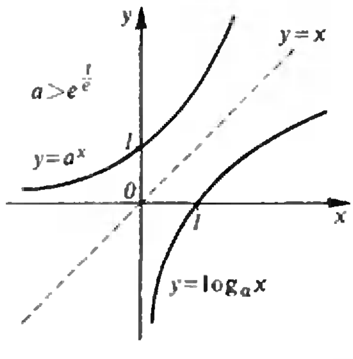


Рис. 8.

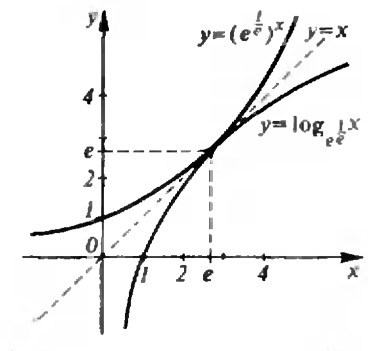


Рис. 9.

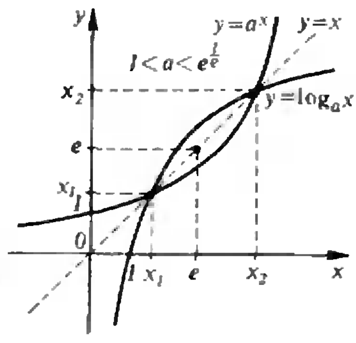


Рис. 10.

$x\in(\beta;1)$. Таким образом, точки α и β являются соответственно: α — точкой максимума, а β — точкой минимума функции f (график этой функции показан на рисунке 7, *в*).

Для завершения нашего исследования докажем, что $\alpha<x_0<\beta$.

Упражнение 8. Докажите, что $x_0<\frac{1}{e}$ при $0<a<e^{-e}$. Указание. *Предположив, что* $x_0>\frac{1}{e}$, получим $x_0=a^{x_0}<a^{\frac{1}{e}}<\frac{1}{e}$ — противоречие!

Вычислим теперь $\varphi(x_0)=x_0^2\ln^2 a-1=\ln^2 a^{x_0}-1=\ln^2 x_0-1$. Так как $\ln x_0<-1$, сразу получаем $\varphi(x_0)>0$, так что $f'(x_0)<0$, т. е. $\alpha<x_0<\beta$.

Отсюда следует, что $f(\alpha)>0$, а $f(\beta)<0$, а из свойств монотонности функции f окончательно получаем, что на промежутках $(0;\alpha)$, $(\alpha;\beta)$ и $(\beta;1)$ уравнение (2) имеет по одному корню, а на промежутке $(1;\infty)$ корней не имеет.

Окончательный результат таков: при $0<a<e^{-e}$ уравнение $a^x=\log_a x$ имеет три корня. При $e^{-e}\leqslant a<1$ — один корень.

Упражнение 9. Докажите, что при различных значениях a взаимное расположение графиков функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$ такое, как показано на рисунках 8, 9 и 10. Постройте соответствующие графики при $e^{-e}<a<1$, $a=e^{-e}$ и $0<a<e^{-e}$.

О трисекции угла и удвоении куба

Как известно, с помощью циркуля и линейки невозможно осуществить трисекцию произвольного угла (построить угол, втрое меньший данного) и удвоение куба (построить ребро куба, объем которого вдвое больше объема куба с данным ребром). Однако, если привлечь дополнительные механические устройства, обе задачи поддаются решению.

Устройство для трисекции угла изобрел югославский ученый *Б. Шабрич* (рис. 1). Оно состоит из стержней a и b длинами $2R$, шарнирно закрепленных в центре окружности O радиусом R. Массы стержней a и b равны m и $2m$. Невесомый стержень OM длиной R соединяет центр окружности с концом M стержня b. Штифт T, соединяющий стержни a и b, способен передвигаться по окружности.

Подвесим описанное устройство вертикально за точку V и закрепим стержень OM под углом α к вертикали. Точка T займет такое положение, когда потенциальная энергия системы минимальна (т. е. центр тяжести стержней a и b занимает наиболее низкое положение). Пусть стержень a составляет с вертикалью угол β. Центр тяжести стержня a находится на расстоянии $R\cos\beta$ от горизонтали OO', проходящей через точку O, а центр тяжести стержня b — на расстоянии $R\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\alpha\right)$ от этой горизонтали. Следовательно, центр тяжести

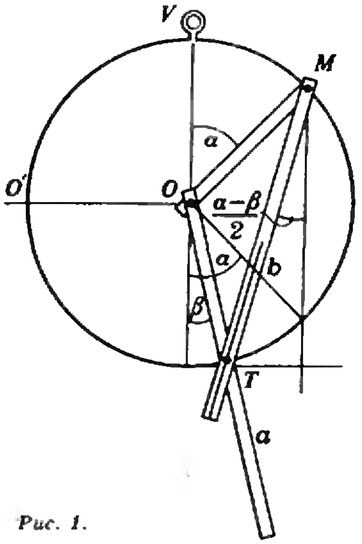


Рис. 1.

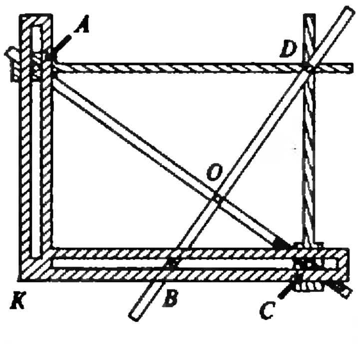


Рис. 2.

системы находится на расстоянии

$$f(\beta)=\frac{1}{3m}\left(mR\cos\beta+2mR\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\alpha\right)\right)=\frac{1}{3}R\left(\cos\beta+2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\alpha\right)$$

от горизонтали OO'.

Минимум функции $f(\beta)$ достигается при $f'(\beta)=0$, т. е. при

$$-\sin\beta+\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0.$$

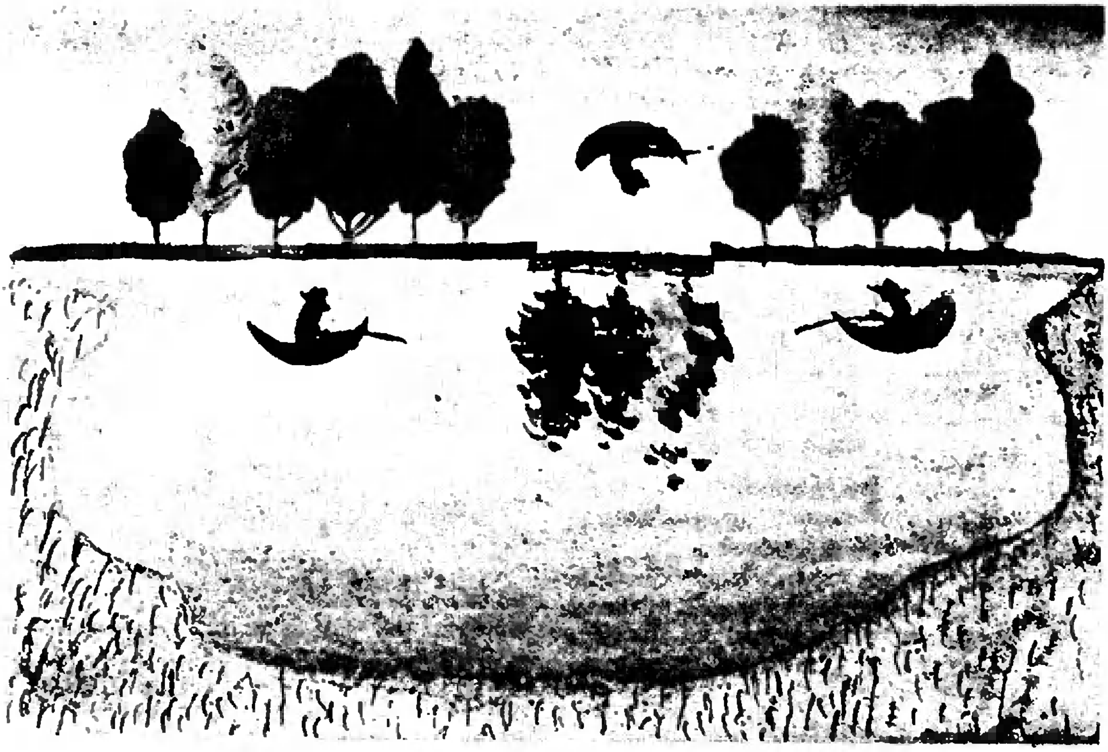
Отсюда $\beta=\frac{\alpha-\beta}{2}$, т. е. $\beta=\alpha/3$. Итак, угол β равен трети данного угла α.

Устройство для «удвоения куба» (рис. 2) известно очень давно. Оно состоит из жесткого прямого угла AKC, двух стержней AD и DC, способных скользить по сторонам AK и KC, оставаясь им перпендикулярными, и диагонального прямого креста. На кресте — штифты A и B, способные скользить по пазам угла AKC, причем $OA=2OB$. Из подобия треугольников BOC, COD и DOA следует, что

$$\frac{BO}{OC}=\frac{OC}{OD}=\frac{OD}{OA}.$$

Из этих пропорций, используя равенство $OA=2OB$, находим $OA^3=2OD^3$.

Итак, если дан куб с ребром длиной OD, то куб с ребром OA имеет вдвое больший объем.



Практикум абитуриента

Решение неравенств методом интервалов

Кандидат педагогических наук
В. ЗАТАКАВАЙ

Эта статья адресована старшеклассникам (10—11 классы) и может быть использована при подготовке к вступительным экзаменам в вузы.

При решении неравенств обычно используются два стандартных подхода. Рассмотрим их на примере простого неравенства

$$\frac{x-1}{x-2}>0.$$

Это неравенство сводится к двум системам:

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x-2>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-1<0, \\ x-2<0. \end{cases}$$

Из первой системы получаем $x>2$, или $(2; +\infty)$. Из второй — $x<1$, или $(-\infty; 1)$. Решение исходного неравенства: $(-\infty; 1)\cup(2; \infty)$.

Другой метод — это известный метод интервалов. Его идея очень проста. Так, в данном случае числитель дроби $\frac{x-1}{x-2}$, обращаясь в 0 при $x=1$, сохраняет знак «минус» на полупрямой $(-\infty; 1)$ и знак «плюс» на полупрямой $(1; \infty)$.

Знаменатель дроби, обращаясь в 0 при $x=2$, сохраняет знак «минус» на полупрямой $(-\infty; 2)$ и «плюс» — на $(2; \infty)$. Таким образом, дробь может изменить знак лишь при переходе через точки $x=1$ и $x=2$ и, следовательно, сохраняет тот или иной знак

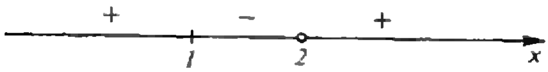


Рис. 1.

на каждом из трех промежутков: $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$ и $(2; +\infty)$ (рис. 1).

На таком простом примере легко вспомнить идею метода интервалов, но нельзя увидеть никаких его заметных преимуществ. Другое дело — более сложные неравенства.

Пример 1.

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\geqslant\frac{1}{x-3}.$$

Решение. После переноса дроби $\frac{1}{x-3}$ в левую часть и приведения к общему знаменателю получаем:

$$\frac{x^2-6x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}\geqslant 0.$$

Первый подход к решению этого неравенства — с помощью систем неравенств — приводит к рассмотрению довольно большого числа систем. Метод интервалов в данном случае гораздо более рационален. Функция $f(x)=\frac{x^2-6x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ определена на всей числовой оси за исключением «нулей» знаменателя — точек 1, 2, 3. Нули числителя: $3-\sqrt{2}$ и $3+\sqrt{2}$. Нанесем все пять точек на ось. На каждом из шести образовавшихся промежутков функция $f(x)$ сохраняет тот или иной знак.

Ответ фактически «нарисован» (рис. 2), остается лишь аккуратно его записать.

Рис. 2.

Ответ: $(1; 3-\sqrt{2}]\cup(2; 3)\cup[3+\sqrt{2}; +\infty)$.

В рассмотренном примере знаки в промежутках знакопостоянства функции чередуются. Однако делать «обобщение», что так будет происходить всегда, разумеется, не следует.

Пример 2.

$$\frac{(x+2)^2}{x-1}\geqslant 0.$$

Решение. Это неравенство весьма «коварно». Часто учащиеся решают его следующим образом: так как $(x+2)^2\geqslant 0$ при всех x, знак дроби зависит от знака знаменателя, откуда получается $x>1$. Неполнота ответа очевидна: изолированная точка $x=-2$ также удовлетворяет *нестрогому* неравенству. Метод же интервалов, наряду с «компактностью», в большей степени помогает избежать такого рода ошибок (рис. 3).

Рис. 3.

Остается записать промежутки и точки, в которых функция $f(x)=\frac{(x+2)^2}{x-1}$ принимает неотрицательные значения.

Ответ: $\{-2\}\cup(1; +\infty)$.

Заметим, что в этом примере при переходе через $x=-2$ знак функции не изменился. Это связано с «кратностью» нуля функции. Очевидно, что если кратность нуля — четная (в данном случае кратность нуля $x=-2$ равна двум), то знак функции при переходе через такую точку не меняется; если кратность нуля — нечетная, то знак функции меняется на противоположный. В школе, как правило, выясняют знак функции на каждом из промежутков знакопостоянства. Это разумно, но в практике вступительных экзаменов встречаются весьма «неудобные» промежутки: определение знака на них сопряжено с вычислительными трудностями. Поэтому учет кратности корня зачастую облегчает решение.

Применимость метода интервалов не ограничивается решением рациональных неравенств. Универсальность метода основана на достаточно наглядном свойстве непрерывных функций: «Если на интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак»*).

Рассмотрим еще несколько примеров.

*) См. например, учебное пособие «Алгебра и начала анализа 9—10», М.: Просвещение, 1988, с. 98.

Пример 3.

$$\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \geqslant 2.$$

Решение. Область определения $x \leqslant 2$, $x \neq 0$. Приведем неравенство к виду

$$\frac{\sqrt{2-x}+2x-3}{x} \geqslant 0.$$

Для того чтобы найти нули числителя, необходимо решить иррациональное уравнение $\sqrt{2-x}=3-2x$. При решении иррациональных уравнений из-за возведения в квадрат могут возникнуть посторонние решения, от которых необходимо избавиться (в данном случае $x=1\frac{3}{4}$ — постороннее решение).

Итак, нуль числителя при $x=1$. Решение неравенства представлено на рисунке 4.

Рис. 4.

Ответ: $(-\infty; 0)\cup[1; 2]$.

Пример 4.

$$\frac{1}{3+\sqrt{9-x^2}}+\frac{1}{3-\sqrt{9-x^2}} > \frac{1}{x}.$$

Решение. Область определения находится из следующих условий: $9-x^2 \geqslant 0$, $3-\sqrt{9-x^2} \neq 0$, $x \neq 0$, т. е. $[-3; 0)\cup(0; 3]$. Причем в данном случае важно зафиксировать эту область с самого начала, так как уже на подготовительном этапе после очевидных преобразований выражение $\sqrt{9-x^2}$ исчезает, и получающееся неравенство $\frac{6-x}{x^2} > 0$ имеет гораздо более «широкие» и область определения, и решение.

Решение неравенства $\frac{6-x}{x^2} > 0$, а именно $(-\infty; 0)\cup(0; 6)$, ограниченное областью определения исходного, приводит к ответу: $[-3; 0)\cup(0; 3]$.

Пример 5.

$$\log_2\sqrt{7-x}\cdot\log_{(x-1)}4 \leqslant 2.$$

Решение. Область определения задается условиями $7-x>0$, $x-1>0$, $x-1\neq 1$, т. е. $(1; 2)\cup(2; 7)$.

На подготовительном этапе получаем:

$$\frac{\log_2\sqrt{7-x}}{\log_4(x-1)} \leqslant 2,$$

и далее,

$$\frac{\log_2(7-x)-2\log_2(x-1)}{\log_2(x-1)} \leqslant 0.$$

Последнее неравенство, с учетом найденной ранее области определения, равносильно исходному неравенству.

Нули числителя определяются из уравнения

$$\log_2(7-x)=2\log_2(x-1).$$

При решении логарифмического уравнения есть опасность приобрести посторонние корни: $7-x=(x-1)^2$, или $x^2-x-6=0$. Здесь решение $x=3$ — корень нашего логарифмического уравнения, а решение $x=-2$ — посторонний корень, так как $-2-1=-3<0$.

Нуль знаменателя — $x=2$.

На рисунке 5 представлено решение исходного неравенства.

Рис. 5.

Ответ: $(1; 2)\cup[3; 7)$.

Пример 6.

$$\log_{(x^2-2x+1)}(3-x) \leqslant 1.$$

Решение. В примере содержится «коварная» подсказка: полный квадрат разности в основании логарифма провоцирует желание избавиться квадрата:

$$\frac{1}{2}\log_{|x-1|}(3-x) \leqslant 1.$$

Рассмотрение логарифмического неравенства, содержащего знак модуля, связано с известными трудностями. На мой взгляд, более рационально привести логарифм к некоторому конкретному основанию, скажем к основанию e, и воспользоваться методом интервалов.

Условия $x^2-2x+1\neq 0$, $x^2-2x+1\neq 1$, $3-x>0$ дают область определения: $(-\infty; 0)\cup(0; 1)\cup(1; 2)\cup(2; 3)$.

Переходим к основанию e:

$$\frac{\ln(3-x)}{\ln(x^2-2x+1)} \leqslant 1.$$

Получаем

$$\frac{\ln(3-x)-\ln(x^2-2x+1)}{\ln(x^2-2x+1)} \leqslant 0.$$

Нули числителя определяются из уравнения $3-x=x^2-2x+1$, а именно, $x=-1$, $x=2$; нули знаменателя — из условия $x^2-2x+1=1$, а именно, $x=0$, $x=2$. Хотя для расстановки знаков на каждом промежутке можно привлечь соображения кратности корня, мы рекомендуем здесь все же проверить знаки на каждом промежутке непосредственно (рис. 6).

Рис. 6.

Крайне полезен метод интервалов при решении тригонометрических неравенств, точнее, неравенств, содержащих тригонометрические функции.

Пример 7.

$$\frac{\sqrt{7+12x-4x^2}}{\cos x} \leqslant 0.$$

Решение. Область определения задается следующими условиями:

$7+12x-4x^2 \geqslant 0$, $\cos x \neq 0$, т. е. $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\ \frac{7}{2}\right]$.

Как и в примере 2, типичная ошибка здесь — потеря изолированного значения $x=-0{,}5$, удовлетворяющего *нестрогому* неравенству.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{\pi}{2};\ \frac{7}{2}\right]$.

Решать любое неравенство методом интервалов вовсе не обязательно. В то же время метод интервалов весьма универсален, и во многих случаях его применение облегчает решение.

Предлагаем несколько неравенств для самостоятельного решения.

1. $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1} \leqslant 0.$

2. $\dfrac{2x+5}{|x+1|} \geqslant 1.$

3. $(2+x)\sqrt{x^2-2x-3} \geqslant 0.$

4. $\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leqslant \dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}.$

5. $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5 > 1.$

6. $\log_{16}(x^2-5x+6)\cdot\log_{(3-x)}4 \leqslant \dfrac{0{,}25}{\log_4(3-x)}.$

7. $\dfrac{(|x|-1)(2^x-2)}{\sqrt{3-x}+2x} \leqslant 0.$

8. $\dfrac{\sqrt{x-0{,}5}}{\log_3 x^2} \geqslant 0.$

9. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} \geqslant 0.$

10. $\dfrac{x^2+2x-8}{\sqrt{\sin x}} \leqslant 0.$

Внимание!

Берет старт новый конкурс!

Двадцатый век, открывший человечеству дорогу в Космос, подходит к концу. Следующий век станет веком интенсивного освоения космического пространства. Если вы хотите приблизить наступление новой эры, если у вас есть оригинальные идеи и технические решения, для которых малы земные масштабы, если вы исполнены желания реализовать свой творческий потенциал и испытать себя в серьезном и перспективном деле, примите участие в конкурсе

АСТРОИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Организаторы конкурса: Всесоюзное молодежное аэрокосмическое общество «Союз», Выставочный комплекс «Наука» ВДНХ СССР, Авиационный научно-технический центр «Союз».

Победителей конкурса ждут награды: первая премия — 3000 рублей, две вторых премии — по 1000 рублей и три третьих — по 500 рублей, а также поощрительные призы.

На конкурс принимаются проекты космических поселений, технологических сооружений и энергетических установок; ресурсодобывающих, информационных и других космических систем; авиационных и космических тренажеров, игр, медицинских систем диагностики и оздоровления.

Первый этап конкурса будет проходить по 30 ноября 1990 года. Ваши проекты просим присылать по адресу: 101000, Москва, а/я № 924, ВАКО «Союз», «Конкурс астроинженерных конструкций».

Ждем Ваших необычных проектов!

ВАКО «Союз»

Варианты вступительных экзаменов

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в различные вузы в 1989 году.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Бригада трактористов вспахала 300 га земли. Если бы в бригаде было на 3 трактора больше, она бы закончила работу на 6 дней раньше. Сколько тракторов было в бригаде, если один трактор обрабатывал 15 га в день?

2. Решите уравнение

$$\cos x - \sin(5x + 3\pi/2) = \sqrt{3}\cos(3x + \pi).$$

3. Решите уравнение

$$\log_2\left(\frac{3}{8}x + 1\right) = 1 - \log_2 x.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{x - 2} < 0.$$

5. Найдите все значения параметра k, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y - \dfrac{1}{2} = k(x+2), \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

имеет решение.

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого AA_1 — одно из ребер, через вершину A, середину ребра A_1D_1 и центр грани D_1DCC_1 проведена плоскость. Из всех сечений куба, параллельных этой плоскости, найдите сечение с наибольшей площадью; определите его площадь, считая длину ребра равной a.

Вариант 2

1. Расстояние между пунктами A и B равно 60 км, причем 2/3 дороги приходится на шоссе, а остальная часть — на грунтовую дорогу. Найдите скорость движения автомобиля по грунтовой дороге и по шоссе, если по шоссе скорость его движения на 20 км/ч больше его скорости по грунтовой дороге, а на весь путь он затратил всего 2 часа.

2. Решите уравнение

$$\sin^2 x - 3\cos^2 x = 4\sin x.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\lg(3x^2 - 12x + 13)}{\lg(x-1)} = 2.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{2^x + 3} < \frac{1}{2^{x+2} - 1}.$$

5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \lg(4+y) = \lg x, \\ a - y = \dfrac{1}{2}(x+a)^2 \end{cases}$$

имеет решение.

6. В сферу радиусом R вписана правильная треугольная пирамида, у которой апофема равна диаметру окружности, описанной вокруг основания. Между сферой и пирамидой расположена правильная четырехугольная призма, одно из оснований которой лежит в плоскости боковой грани пирамиды, а вершины другого основания принадлежат сфере. Какой наибольший объем может иметь призма?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Шайба массой $m = 50$ г соскальзывает без начальной скорости по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, и, пройдя по горизонтальной плоскости расстояние $l = 50$ см, останавливается. Найдите работу силы трения на всем пути, считая всюду коэффициент трения $\mu = 0{,}15$.

2. Санки, движущиеся по льду со скоростью $v_0 = 6$ м/с, въезжают на асфальт. Длина полозьев санок $L = 2$ м, коэффициент трения санок об асфальт $\mu = 1$. Какой путь пройдут санки до полной остановки?

3. Легкая пружина жесткостью k и длиной l стоит вертикально на столе. С высоты H над столом на нее падает небольшой шарик массой m. Какую максимальную скорость будет иметь шарик при своем движении вниз? Трением пренебречь.

4. Гладкий легкий горизонтальный стержень AB может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец A. На стержне находится небольшая муфточка массой m, соединенная невесомой пружиной длиной l_0 с концом A. Жесткость пружины k. Какую работу надо совершить, чтобы эту систему медленно раскрутить до угловой скорости ω?

5. По газопроводной трубе идет углекислый газ при давлении $p = 4 \cdot 10^5$ Па и температуре $t = 7$ °С. Какова средняя скорость движения газа в трубе, если за время $\tau = 10$ мин протекает масса газа $m = 2$ кг? Площадь сечения трубы $S = 5$ см^2.

6. В откачанном сосуде объемом $V = 1$ дм^3 находится $m = 1$ г гидрида урана (UH_3). При нагреве до температуры $t = 400$ °С гидрид урана полностью разлагается на уран и водород. Найдите давление водорода в сосуде при этой температуре. Атомная масса урана $A = 238$.

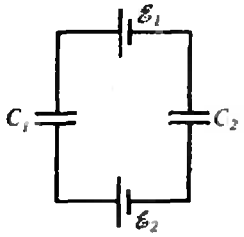


Рис. 1.

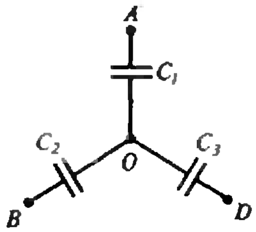


Рис. 2.

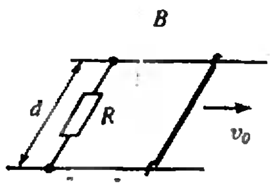


Рис. 3.

Рис. 4.

7. Определите напряжения на конденсаторах (рис. 1), если $\mathscr{E}_1=12$ кВ, $\mathscr{E}_2=13$ кВ, $C_1=3$ мкФ, $C_2=7$ мкФ. Проводимостью диэлектриков пренебречь.

8. Три незаряженных конденсатора, емкости которых равны C_1, C_2 и C_3, соединены, как показано на рисунке 2, и подключены к точкам A, B и D. Потенциалы этих точек равны φ_A, φ_B и φ_D соответственно. Определите потенциал общей точки O.

9. По горизонтальным параллельным рельсам, расстояние между которыми d, может скользить без трения перемычка массой m (рис. 3). Рельсы соединены резистором сопротивлением R и помещены в вертикальное однородное магнитное поле, индукция которого равна B. Перемычке сообщают скорость v_0. Найдите путь, пройденный перемычкой до остановки. Как зависит ответ от направления вектора индукции $\vec{B}$?

10. На торец стеклянного стержня падает свет под углом α (рис. 4). Каким должен быть наименьший показатель преломления стекла, чтобы свет, вошедший в стержень, не мог выйти через его боковую стенку независимо от угла α?

Публикацию подготовили
Л. Паршев, Ю. Струков

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$6+4\sqrt{3-x}=5x.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{4}{\lg 10x}-\frac{5}{\lg 100x}\geqslant 0.$$

3. Решите уравнение

$$\sin 3x-4\sin x\cos x=0.$$

4. К бассейну объемом 1200 м^3 подведены две трубы: подающая и отводящая. Если открыть одновременно обе трубы, то бассейн заполнится за 60 часов. Если же открыта только одна труба, то заполнение бассейна водой продолжается на два часа меньше, чем его освобождение от воды. Сколько воды в час пропускает каждая труба?

5. Определите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{13}$, а медиана третьей стороны равна 2.

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$x^2+2x-4\leqslant x+2.$$

2. Решите уравнение

$$x+\log_2(9-2^x)=3.$$

3. Решите уравнение

$$\sin^3 x+\cos^3 x=\cos 2x.$$

4. Путь от A до B пассажирский поезд проходит на 3 ч 12 мин быстрее товарного. За то время, что товарный поезд проходит путь от A до B, пассажирский проходит на 288 км больше. Если скорость каждого поезда увеличить на 10 км/ч, то пассажирский пройдет расстояние от A до B на 2 ч 24 мин быстрее товарного. Определите расстояние от A до B.

5. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами p_1 и p_2. Найдите стороны треугольника.

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$|x-2|=3x-4.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{3^x+1}+\frac{1}{3^x-3}\leqslant 0.$$

3. Решите уравнение

$$1+\sin 2x=\sin x+\cos x.$$

4. Один турист вышел в 6 ч, а второй навстречу ему — в 7 ч. Они встретились в 8 ч и, не останавливаясь, продолжили путь. Сколько времени затратил каждый из них на весь путь, если первый пришел в то место, откуда вышел второй, на 28 мин позже, чем второй пришел в то место, из которого вышел первый. Каждый шел без остановок с постоянной скоростью.

5. Точка пересечения медиан прямоугольного треугольника удалена от катетов на расстояния соответственно 3 и 4. Найдите расстояние от этой точки до гипотенузы.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Танк, движущийся со скоростью $v_0=36$ км/ч, притормаживает одну из гусениц так, что ось ее ведущего колеса начинает двигаться вперед со скоростью $v_1=32{,}4$ км/ч. Рас-

стояние между гусеницами $l=2$ м. Под каким углом к первоначальному направлению движения будет двигаться танк спустя время $t=2$ с?

2. Лягушка сидит на конце доски длиной $l=0{,}8$ м. Доска плавает на поверхности пруда. С какой минимальной скоростью должна прыгнуть лягушка, чтобы оказаться после прыжка на другом конце доски? Массы лягушки и доски одинаковы. Трением о воду пренебречь.

3. Автомобиль с работающим двигателем, имея начальную скорость $v=72$ км/ч, въезжает в гору, поверхность которой наклонена под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Гору какой высоты может преодолеть автомобиль, если коэффициент трения о полотно дороги $\mu=0{,}4$?

4. Камера заполняется смесью водорода с кислородом при температуре $t=27$ °С. Парциальные давления газов в камере одинаковы. Камера герметизируется, и происходит взрыв. Сразу после завершения реакции соединения водорода с кислородом давление в камере оказывается вдвое больше первоначального. Какова температура в камере в этот момент?

5. Какая масса воды поднимется по смачиваемой ею капиллярной трубке радиусом $r=0{,}25$ мм? Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma=0{,}073$ Н/м.

6. Заряженные шарики, находящиеся на расстоянии $r=60$ см друг от друга в вакууме, притягиваются с силой $F=0{,}3$ Н. Суммарный заряд шариков $Q=4$ мкКл. Определите заряд каждого шарика. Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

7. Электромотор питается от батареи с ЭДС $\mathscr{E}=12$ В. Какую мощность развивает мотор при протекании по его обмотке тока $I_1=2$ А, если при полном затормаживании якоря по цепи течет ток $I_2=3$ А?

8. Определите резонансную частоту контура, если максимальный заряд конденсатора $q_m=1$ мкКл, а максимальный ток в контуре $I_m=10$ А.

9. Две линзы с фокусным расстоянием $F=30$ см каждая находятся на расстоянии $l=15$ см друг от друга. При каких положениях предмета система дает действительное изображение?

10. При распаде нейтральной частицы, летящей со скоростью 0,6 *c* (*c* — скорость света), образовалось два фотона. Каков минимальный угол разлета фотонов?

Публикацию подготовили
Р. Ведерников, М. Либерзон, А. Симонов

Московский институт нефти и газа им. И. М. Губкина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства

$$|x+6{,}5|>12.$$

2. Вычислите при $a=0{,}3$

$$\frac{(\sqrt[3]{7}\,b^{\frac{1}{3}}+a)^2-4\sqrt[3]{7ba}}{7^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{b}-a}-\sqrt[3]{7b}.$$

3. Сумма 11-го и 20-го членов арифметической прогрессии равна 7. Найдите сумму первых тридцати членов этой прогрессии.

4. Найдите целое решение системы

$$\begin{cases}2x^2+x-15<0,\\ x<-1.\end{cases}$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2+19x+40}=-x-4.$$

6. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\frac{0{,}25^{3x+5}}{0{,}0625^{6-x}}<64.$$

7. Вычислите $\log_{5^7}\sqrt{5}\sqrt[4]{125}$.

8. Найдите середину промежутка, являющегося множеством решений неравенства

$$\log_{x-3{,}2}(4{,}2-x)>1.$$

9. Найдите абсциссу точки минимума функции

$$y=2x^3+3x^2-36x+21.$$

10. Вычислите

$$\operatorname{tg}\arcsin\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

11. Вычислите

$$\frac{\cos^2 57°-\sin^2 3°}{\cos 54°}.$$

12. Найдите в градусах наибольший отрицательный кореиь уравнения

$$\cos 6x+\cos 12x=15\cos 3x.$$

13. Длина одного из катетов прямоугольного треугольника равна 12. Расстояние от центра описанной около треугольника окружности до этого катета равно 2,5. Найдите длину гипотенузы треугольника.

14. Найдите площадь правильного восьмиугольника, если радиус описанной около него окружности равен $\sqrt[4]{2}$.

15. Угол между боковой гранью и плоскостью основания правильной треугольной пирамиды равен 45°. Объем пирамиды равен 1/3. Найдите длину стороны основания пирамиды.

16. В цилиндр вписан шар. Найдите объем шара, если объем цилиндра равен 7,5.

Вариант 2

1. Уравнение $|x^2-2x-3|=a$ имеет ровно 3 корня. Найдите значение параметра a.

2. Упростите выражение

$$\frac{a-2{,}25}{\sqrt{a}-1{,}5}-\frac{a\sqrt{a}-27/8}{a+1{,}5\sqrt{a}+9/4}.$$

3. Число членов геометрической прогрессии четно. Сумма членов этой прогрессии в 6 раз больше суммы ее членов, стоящих на четных местах. Найдите знаменатель прогрессии.

4. Найдите наименьшее целое число из области определения функции

$$y=\sqrt{\frac{6x-1}{9-2x}}.$$

5. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\sqrt{24-x}>12-x.$$

6. Решите уравнение

$$0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}.$$

7. Вычислите

$$\log_{0,25}25+\log_{0,5}1{,}6.$$

8. Найдите меньший корень уравнения

$$\log_{13}x\cdot\log_{2,5}x=\log_{13}2{,}5.$$

9. Прямая $y=4x-7$ касается графика функции $y=2x^3-50x+101$. Найдите абсциссу точки касания.

10. Найдите наименьшее значение функции

$$y=2+\frac{10}{\pi}\arcsin(4x-1).$$

11. Вычислите при $\alpha=\pi/21$

$$4\sqrt{2}\left(\cos^2\frac{7\alpha}{8}-\sin^2\frac{49\alpha}{8}\right).$$

12. Сколько корней уравнения

$$\sin x-\sin 2x+\sin 3x=0$$

находится в промежутке $[0;\pi]$?

13. Вокруг окружности описана трапеция, средняя линия которой равна 5, а синус острого угла при основании равен 0,8. Найдите площадь трапеции.

14. В сектор с углом 90° вписана окружность, длина которой равна $12(\sqrt{2}-1)$. Найдите длину дуги сектора.

15. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2, боковое ребро пирамиды равно 4. Найдите объем пирамиды.

16. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник. Найдите отношение объема конуса к объему вписанного в него шара.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Камень, брошенный с земли под углом $\alpha=45°$ к горизонтальной плоскости, через $t=0{,}8$ с после начала движения имел вертикальную составляющую скорости $v_в=12$ м/с. Чему равно расстояние между точкой бросания и местом падения камня? Ускорение силы тяжести $g=10$ м/с^2.

2. Шар массой $m=4$ кг, имевший скорость $v=5$ м/с, сталкивается с покоящимся шаром такой же массы. Считая удар неупругим, найдите выделившееся количество теплоты.

3. Во сколько раз увеличится радиус круговой орбиты искусственного спутника Земли, если период его обращения возрастет в $n=27$ раз?

4. На сколько плотность некоторого тела больше, чем плотность жидкости $\rho=800$ кг/м^3, если вес*) тела в этой жидкости в $n=3$ раза меньше, чем в воздухе?

5. При нагревании газа при постоянном объеме на один градус давление увеличилось на относительную долю $n=0{,}004$ от первоначальной величины. Какова (в кельвинах) начальная температура газа?

6. По газопроводу течет газ при давлении $p=0{,}83$ МПа и температуре $T=300$ К. Какова скорость движения газа в трубе, если за $\tau=2{,}5$ мин через поперечное сечение трубы площадью $S=5$ см^2 протекает $m=20$ кг газа? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль·К), средняя молярная масса газа $M=40$ кг/кмоль.

7. Напряженность электрического поля плоского воздушного конденсатора емкостью $C=4$ мкФ равна $E=10$ В/см. Расстояние между обкладками $d=1$ мм. Определите энергию электрического поля конденсатора.

8. На резисторе сопротивлением $R=9$ Ом, подключенном к источнику тока с ЭДС $\mathscr{E}=3{,}1$ В, выделяется мощность $P=1$ Вт. Определите внутреннее сопротивление источника тока.

9. Пройдя ускоряющую разность потенциалов $U=3520$ В, электрон попал в однородное магнитное поле с индукцией $B=0{,}002$ Тл, перпендикулярное скорости электрона. Найдите радиус окружности, по которой будет двигаться электрон. Отношение заряда электрона к его массе $\gamma=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг.

10. Действительное изображение предмета, полученное с помощью собирающей линзы, находится от нее на расстоянии $f_1=80$ см. Если собирающую линзу заменить рассеивающей с таким же фокусным расстоянием, мнимое изображение предмета будет отстоять от линзы на $f_2=20$ см. Найдите абсолютную величину фокусного расстояния линз.

Вариант 2

1. С какой высоты падает без начальной скорости тело, если путь, пройденный им за последнюю секунду движения, в $n=7$ раз больше пути, пройденного за первую секунду? Ускорение силы тяжести $g=10$ м/с^2.

2. Тело массой $m=2$ кг брошено с поверхности земли со скоростью $v_0=6$ м/с под углом $\alpha=30°$ к горизонту. На сколько увеличится потенциальная энергия тела, когда оно достигнет высшей точки подъема?

3. Маленький шарик массой $m=0{,}3$ кг привязан к концу вертикальной нерастяжимой нити, другой конец которой закреплен. Шарик с нитью переводят в горизонтальное положение и отпускают без начальной скорости. Чему будет равно натяжение нити в тот момент,

*) Точнее было бы сказать «подъемная сила». (*Примеч. ред.*)

когда она составит угол $\alpha=60°$ с вертикалью? Ускорение силы тяжести $g=10$ м/с^2.

4. Прямой конус плавает в жидкости так, что его ось вертикальна и вершина обращена вверх. Плотность материала конуса составляет $n=7/8$ плотности жидкости. Во сколько раз высота подводной части конуса меньше всей его высоты?

5. До какой температуры (в кельвинах) следует нагреть изобарически газ, чтобы его плотность уменьшилась в $n=2$ раза по сравнению с его плотностью при $t°=0$ °С?

6. Определите начальную температуру (в кельвинах) азота массой $m=0{,}56$ кг, если при изобарном нагревании до $T=370$ К газ совершил работу $A=16{,}6$ кДж. Молярная масса азота $M=28$ кг/кмоль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль·К).

7. На точечный заряд, находящийся внутри плоского конденсатора емкостью $C=100$ мкФ, действует некоторая сила. Напряжение на конденсаторе $U=10$ кВ. Во сколько раз увеличится сила, действующая на заряд, если конденсатор в течение $t=2$ мин подзаряжать током $I=0{,}1$ А?

8. В однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл находится виток площадью $S=10$ см^2, расположенный перпендикулярно линиям индукции. Сопротивление витка $R=2$ Ом. Какой заряд протечет по витку при выключении поля?

9. Амплитуда незатухающих колебаний точки струны $A=1$ мм, частота $f=1$ кГц. Сколько сантиметров составит путь, пройденный точкой за время $t=1{,}2$ с?

10. В цепочке радиоактивных превращений элемента с порядковым номером $Z_1=92$ и атомной массой $A_1=235$ в элемент с $Z_2=82$ и $A_2=207$ (урана в свинец) содержится несколько альфа- и бета-распадов. Сколько всего распадов в этой цепочке?

Публикацию подготовили
Л. Белопухов, Б. Писаревский

Московский институт электронной техники

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение, вычислите его значение при $a=11$, $b=6$:

$$\frac{\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}\right)a^3}{((\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab})^2-ab}.$$

2. Найдите

$$A=\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha,$$

если $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=5$.

3. Решите уравнение

$$\lg(3x^2+12x+19)-\lg(3x+4)=1.$$

4. Найдите решение системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=2(xy+2), \\ x+y=6. \end{cases}$$

5. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}>\frac{x}{2}.$$

6. Средняя линия трапеции равна 10 и делит площадь трапеции в отношении 3:5. Найдите длины оснований этой трапеции.

7. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 3, а сторона основания равна 2. Вычислите косинус угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

8. Свежие грибы содержат по весу 90 % воды, а сухие — 12 % воды. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих?

9. На отрезке $[0;\pi]$ найдите решение уравнения

$$\sqrt{\operatorname{tg}x+\sin x}+\sqrt{\operatorname{tg}x-\sin x}=\sqrt{3\operatorname{tg}x}.$$

10. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x}{6}}(\log_x\sqrt{6-x})>0.$$

11. Дайте определение прямой, параллельной плоскости.

12. Сформулируйте теорему косинусов.

13. Выведите формулу логарифма произведения.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{t}}\right)\left(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{t}}+2\right).$$

2. Решите уравнение

$$\log_{\sqrt{6}}(4^x-6)-\log_{\sqrt{6}}(2^x-2)=2.$$

3. При каких значениях параметра a равны между собой корни квадратного уравнения

$$x^2-(2a+1)x+2a=0?$$

4. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}-\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}=-2.$$

5. Решите неравенство

$$\frac{|x-2|-|x+2|}{x-1}>0.$$

6. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются под прямым углом. $AC=3$, $BC=4$. Найдите сторону AB этого треугольника.

7. Найдите отношение поверхности шара к поверхности вписанного в него куба.

8. Теплоход прошел по течению реки 120 км и столько же против течения и затратил на весь путь 8 ч. Определите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки равна 8 км/ч.

9. Упростите выражение

$$\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}(30°-\alpha)+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}(60°-\alpha)+\operatorname{tg}(60°-\alpha)\operatorname{tg}(30°-\alpha).$$

10. Решите уравнение

$$x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x.$$

11. Дайте определение точки максимума.
12. Сформулируйте теорему синусов.
13. Выведите формулу синуса половинного угла.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Определите среднюю плотность планеты, продолжительность суток на которой шесть часов. На экваторе этой планеты пружинные весы показывают на 10 % меньший вес, чем на полюсе. Гравитационная постоянная $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ м^3/(кг$\cdot$с^2).

2. Сможет ли воздушный шар, наполненный гелием, поднять груз массой $m_1=100$ кг, если объем шара $V=150$ м^3, а масса оболочки $m_2=8$ кг? Давления и температуры гелия внутри шара и воздуха снаружи одинаковы и равны соответственно $p=10^5$ Па и $t=15$ °С. Молярная масса гелия $M_г=4$ г/моль, воздуха $M_в=29$ г/моль. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль$\cdot$К).

3. Элемент атомной батареи (источника тока) представляет собой плоский конденсатор, на одну из обкладок которого равномерно нанесен радиоактивный препарат, испускающий α-частицы со скоростью $v=1{,}2\cdot10^6$ м/с. Определите ЭДС такого элемента, если отношение заряда α-частицы к ее массе $\gamma=4{,}8\cdot10^7$ Кл/кг.

4. Определите, какое количество меди выделилось из раствора за $\tau=100$ с, если ток, протекавший через электролит, менялся по закону $I(t)=(5-0{,}02\,t)$ А, где t — время в секундах. Постоянная Фарадея $F=96500$ Кл/моль, молярная масса меди $M=63{,}5$ г/моль, валентность меди $n=2$.

5. В дно водоема глубиной $H=2$ м вертикально вбита свая, на $h=0{,}5$ м выступающая из воды. Найдите длину тени от сваи на дне водоема, если высота Солнца над горизонтом $\varphi=60°$. Показатель преломления воды принять равным $n=4/3$.

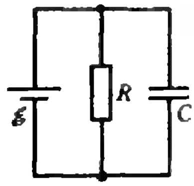
6. Период полураспада одного из радиоактивных изотопов иода составляет $T=8$ суток. Через какое время число атомов этого вещества окажется в $n=100$ раз меньшим по сравнению с их начальным числом?

Вариант 2

1. Вертикально расположенная пружина соединяет два груза. Масса верхнего груза $m_1=2$ кг, а нижнего $m_2=3$ кг. Когда система подвешена за верхний груз, длина пружины равна $l_1=10$ см. Если систему поставить на подставку, длина пружины оказывается равной $l_2=4$ см. Определите длину ненапряженной пружины.

2. В герметичном сосуде объемом $V=5{,}6$ л содержится воздух при давлении $p=10^5$ Па. Какое давление установится в сосуде, если воздуху сообщить количество теплоты $Q=1430$ Дж? Молярную теплоемкость воздуха при постоянном объеме принять равной $C_V=21$ Дж/(моль$\cdot$К). Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль$\cdot$К).

3. Каким должно быть сопротивление R резистора, включенного в схему (см. рисунок),



чтобы напряженность поля в плоском воздушном конденсаторе составила $E=2$ кВ/м. Электродвижущая сила батареи $\mathcal{E}=5$ В, ее внутреннее сопротивление $r=0{,}5$ Ом. Расстояние между пластинами конденсатора $d=0{,}2$ см.

4. С какой скоростью должен ехать велосипедист, чтобы лампочка в фаре велосипеда, рассчитанная на действующее значение напряжения $U=2{,}5$ В, светилась полным накалом при работе динамомашины? Диаметр приводного колеса динамомашины $D=2$ см, число витков обмотки якоря $n=2000$, площадь одного витка $S=5$ см^2, индукция магнитного поля постоянных магнитов $B=0{,}01$ Тл. Поле считать однородным, сопротивлением провода обмотки пренебречь.

5. Точка лежит на оптической оси собирающей линзы на расстоянии $d=40$ см от линзы. Фокусное расстояние линзы $F=10$ см. Точку переместили на расстояние $l=5$ см в плоскости, перпендикулярной оптической оси. На какое расстояние нужно подвинуть линзу в ее плоскости, чтобы изображение точки получилось в первоначальном месте?

6. Излучение с длиной волны $\lambda=0{,}3$ мкм падает на металлическую пластинку. Красная граница фотоэффекта для металла, из которого изготовлена пластинка, $\nu_{min}=4{,}3\cdot10^{14}$ Гц. Чему равна кинетическая энергия фотоэлектронов? Постоянная Планка $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж$\cdot$с, скорость света $c=3\cdot10^8$ м/с.

Публикацию подготовили
А. Берестов, В. Плис, В. Терпигорьева

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение для $f(x)$ и найдите $f'(x)$, если

$$f(x)=\left(\frac{-8-x^3-16x^{-3}}{(2x^3-x^3\sqrt[3]{x^6}-27\sqrt[3]{x^6}+54)^2(2+\sqrt[3]{x^6})^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times0{,}1^{\log_{100}(-x^3)+\lg(-x-3)}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_{x^2+1}(x^5-9x^2+8)\cdot\log_{x^2-1}(x^2+1)=3.$$

3. Студент купил две книги, уплатив за них 6 рублей. Если бы первая книга стоила на 25 % меньше, а вторая — на 50 % больше, то цены книг были бы одинаковыми. Сколько денег уплатил студент за каждую книгу?

4. Найдите корни уравнения

$$\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = \sin(7\pi - x) \sin\frac{7}{6}\pi,$$

принадлежащие области определения функции $y = \sin\sqrt{4\pi^2 - x^2}$.

5. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 20 и 21. Найдите длину окружности, описанной около данного треугольника.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{(a^2-b^2)(a+b)}{a^3-b^3} - \left(\frac{(a-b)^2+3ab}{a^2+b^2}\right)^{-1}\right)^{-1} -$$

$$-\frac{1}{2ab}\cdot 3^{\log_{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+b^2}}$$

2. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{(x^2-2x-8)\log_2 3^{\log_9(x^2-2x+1)}}.$$

3. На реке, скорость течения которой равна 4 км/ч, в направлении ее течения расположены в указанном порядке пристани A, B, C, причем расстояние от A до B вдвое меньше, чем расстояние от B до C. От пристани B в один и тот же момент по направлению к пристани C отправлены плот (плывущий относительно берегов со скоростью течения реки) и катер. Дойдя до пристани C, катер разворачивается и движется по направлению к пристани A. Найдите все значения собственной скорости катера (т. е. скорости катера в стоячей воде), при которых катер приходит в пункт A позже, чем плот приходит в пункт C.

4. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x + 24\pi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{11}{10}\pi\right) = \sin\frac{4}{5}\pi.$$

5. Найдите радиус шара, объем которого равен объему тела, образованного вращением равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг гипотенузы, длина которой равна $2a$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Закон сохранения энергии в тепловых процессах (первый закон термодинамики). Применение этого закона к изопроцессам.

2. Окраска небольших предметов разбрызгиванием краски становится выгодной и безвредной для работающего, если приложить высокое напряжение к струе краски и заземлить окрашиваемый предмет. Дайте объяснение.

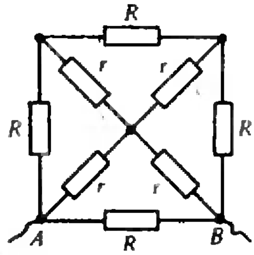


Рис. 1.

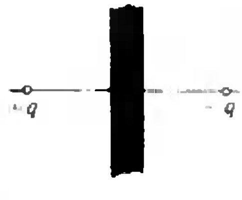


Рис. 2.

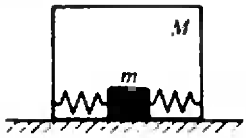


Рис. 3.

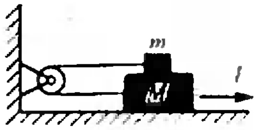


Рис. 4.

3. Из резисторов с сопротивлениями $R = 12$ Ом и $r = 6$ Ом спаяна цепь, изображенная на рисунке 1. Определите сопротивление между точками A и B цепи.

4. Первый раскат грома дошел до наблюдателя через $t = 25$ с после вспышки молнии. На каком расстоянии от наблюдателя возникла молния?

5. Коэффициент полезного действия теплового двигателя $\eta = 20$ %. Какова должна быть температура нагревателя T_1, если температура холодильника $T_2 = 300$ К?

Вариант 2

1. Состав ядра атома. Энергия связи атомных ядер. Ядерные реакции. Деление ядер урана. Ядерный реактор.

2. Как изменится сила, действующая на разноименные точечные заряды, если между ними поместить толстую незаряженную металлическую пластину (рис. 2)?

3. Средняя квадратичная скорость молекул газа $v = 400$ м/с. Определите объем, который занимает $m = 1{,}0$ кг газа при давлении $p = 10^5$ Па.

4. Кабина массой M стоит на шероховатой горизонтальной поверхности с коэффициентом трения μ (рис. 3). Внутри кабины находится брусок массой m, связанный с ней двумя пружинами жесткостью k каждая. При какой амплитуде колебаний бруска кабина сдвинется с места? Трение между бруском и кабиной отсутствует.

5. Расстояние между источником света и экраном $L = 1$ м. Тонкая линза, помещенная между ними, дает четкое изображение при двух положениях, расстояние между которыми $l = 0{,}4$ м. Определите фокусное расстояние линзы.

(Окончание см. на с. 76)

М Ф Т И

Ректор физтеха.

МФТИ — это Московский физико-технический институт История создания института — предмет особой гордости каждого физтеха. Ведь около полувека назад был создан не просто еще один вуз, а вуз нового типа. Его студентам предоставлялась уникальная возможность учиться у таких крупнейших ученых как академики П. Л. Капица, И. В. Курчатов, С. И. Вавилов, Н. Н. Семенов, С. А. Христианович, М. В. Келдыш, Л. Д. Ландау. Обучение было организовано по новой системе, которая ныне известна всему миру как «система физтеха».

В основу «системы физтеха» положены следующие принципы.

1. Тщательный отбор наиболее одаренной и склонной к творческой работе молодежи.

Абитуриенты сдают вступительные экзамены по математике (письменно и устно), физике (письменно и устно) и пишут сочинение. Задачи, предлагаемые экзаменующимся, не выходят за рамки школьной программы, но требуют сообразительности, умения нестандартно мыслить, находить остроумные решения. Те, кто получил положительные оценки на экзаменах, проходят собеседование в комиссии, которая состоит из ведущих ученых страны, работающих в базовых институтах и в лабораториях МФТИ. Собеседование, по мнению ректора физтеха Н. В. Карлова,— самый точный из экзаменов.

Будущий абитуриент должен иметь в виду следующие три момента:

а) система проходных баллов, принятая в других вузах, в МФТИ не применяется, хотя сумма баллов и учитывается;

б) вечерних, заочных и подготовительных отделений институт не имеет;

в) учащиеся, окончившие школу с золотой медалью, поступают в МФТИ на общих основаниях.

2. Непосредственное участие ведущих ученых из научно-исследовательских институтов-организаторов (баз) в обучении студентов.

Тесные контакты с передовыми физиками и математиками стимулируют развитие творческих способностей студентов, прививают навыки к самостоятельной научной работе.

3. Фундаментальное образование.

Наши выпускники, как правило, работают на стыке наук, и тут важны широта и глубина общей подготовки в сочетании с конкретным тренингом во вполне определенной, даже быть может узкой области исследований. Поэтому подготовка научных кадров в МФТИ объединяет в себе широту классического университетского образования и конкретность современных научно-технических знаний.

На первых трех курсах студенты всех факультетов изучают фундаментальные курсы физики и математики в университетском объеме. О высоком уровне преподавания этих дисциплин свидетельствует тот факт, что на протяжении многих лет физтехи лидируют во всесоюзных студенческих олимпиадах по физике и математике.

Для развития технических навыков (умения спроектировать и рассчитать экспериментальную установку, усовершенствовать прибор, провести тонкий эксперимент) широко практикуются лабораторные работы, требующие от студента максимума самостоятельности.

Современный ученый не мыслим без знания иностранных языков. Поэтому в течение первых трех лет учебы обеспечивается глубокое овладение английским языком. Интенсивная система обучения позволяет свободно читать научную литературу, делать доклады по специальности, а также вести беседы на различные темы. На 4 — 5 курсах студенты имеют возможность изучать второй иностранный язык.

4. Специальное образование студентов старших курсов ведется на экспериментальной базе ведущих научно-исследовательских институтов Академии наук СССР и отраслевых НИИ и КБ.

Такое обучение естественным образом приводит к тому, что диапазон специальностей МФТИ постоянно обновляется. По существу физтех — это своеобразная «следящая система», автоматически настраивающаяся на современный уровень состояния науки и техники.

Каждая специальность физтеха имеет свой базовый институт. В каждом из них организована соответствующая базовая кафедра. После ознакомительной практики на 2—3 курсах студент выбирает научную группу и конкретную тему своей будущей работы, которую он выполняет на 4—6 курсах под руководством опытного научного сотрудника. Результат двух последних лет работы обычно составляет содержание дипломной работы.

Участвуя в научных семинарах, конференциях, выполняя конкретные разделы плана научно-исследовательской работы базового института, студенты приобретают опыт коллективной работы.

Такая подготовка дает возможность выпускникам физтеха вступать в жизнь уже сложившимися специалистами, непосредственно после окончания института готовыми к самостоятельной ответственной деятельности в новейших направлениях науки и техники.

Большинство физтехов после окончания института в течение первых трех — пяти лет защищают кандидатские диссертации.

В настоящее время в МФТИ имеется девять факультетов, охватывающих такие направления исследований:

радиофизика и астрофизика;

физика элементарных частиц;

средства дальней, сверхдальней и космической связи;

передача информации и информационные системы;

физика планет;

исследование Земли из космоса;

физика атмосферы, океана и земной коры;

летательная техника, космическая техника и технология;

физика плазмы (космической, звездной и т. д.);

проблемы термоядерного синтеза;

радио и микроэлектроника;

конструирование ЭВМ новых поколений;

искусственный интеллект;

математическая физика;

прикладная математика;

программирование и математическое моделирование в физике, биологии, социологии, экологии;

разработка новых типов лазеров;

голография;

применение лазеров в изучении фундаментальных свойств вещества;

биофизика;

биохимия;

генетика, медицинская биофизика;

физика живых систем;

моделирование биофизических процессов и многое другое.

Итак, дорогой читатель, ты познакомился с Московским физико-техническим институтом и уже примериваешься, каким тоном сказать родителям: «Я буду поступать на физтех». Теперь остановись на минуточку и подумай: а нужно ли тебе все это? Припомни свое отношение к физике и математике в разные моменты своей жизни. Поверь, что труд ученого — это не только успех, слава, Нобелевские премии. Прежде всего это тяжелый, изнурительный труд, требующий полной самоотдачи. Посоветуйся с кем-нибудь, кто уже закончил физтех или учится в нем, если есть вопросы к нам — напиши письмо. Лучше, если твое желание учиться на физтехе будет не результатом минутного увлечения, а трезвым, взвешенным решением взрослого человека.

Наш адрес: 141700, Московская обл., г. Долгопрудный, МФТИ, Приемная комиссия. Телефоны: 408-48-00, 408-49-36.

И в заключение. Прием документов — с 20 июня. Приказ о зачислении в МФТИ объявляется не позднее 14 июля.

Студент физтеха.

Московский Энергетический институт

(Начало см. на с. 72)

Вариант 3

1. Методы регистрации ионизирующих излучений. Радиоактивность. Изотопы. Альфа- и бета-частицы, гамма-излучение.

2. Можно ли всасывающим водяным насосом поднять кипящую воду?

3. Шарик с массой m и зарядом Q, закрепленный на изолированной нити длиной l в однородном электрическом поле, колеблется с периодом $T_0=2\pi\sqrt{l/g}$ относительно положения равновесия, находящегося на одной вертикали с точкой подвеса. Определите величину и направление напряженности электрического поля.

4. На гладком горизонтальном столике лежит брусок массой $M=2$ кг, на котором находится брусок массой $m=1$ кг (см. рис. 4 на с. 73). Оба бруска связаны нитью, перекинутой через невесомый блок. Какую силу F нужно приложить к нижнему бруску, чтобы он двигался с ускорением $a=g/2$? Коэффициент трения между брусками $\mu=0{,}5$.

5. При коротком замыкании батареи возникает ток I_1, а при подключении внешнего сопротивления R в цепи идет ток I_2. Определите ЭДС батареи.

Публикацию подготовили
А. Касаткин, В. Прохоренко, А. Седов

Ответы, указания, решения

[redacted]ение неравенств методом интервалов

1. $[-2;\ -1)\cup(-1;\ 2]$.
2. $[-2;\ -1)\cup(-1;\ +\infty)$.
3. $[-2;\ -1]\cup[3;\ +\infty)$.
4. $[-4;\ -1]\cup\{2\}$.
5. $(1;\ 4)$.
6. $[1;\ 2)$.
7. $\{1\}$.
8. $[0{,}5]\cup(1;\ +\infty)$.
9. $(-1;\ 1)$.
10. $[-4;\ -\pi)\cup(0;\ 2]$.

[redacted]овский государственный технический [redacted]ерситет им. Н. Э. Баумана

Математика

Вариант 1

1. 2. 2. $\pi(2k+1)/6$, $\pi(12k\pm5)/12$, $k\in Z$.
3. 4/3. 4. $(-2;\ 2)$.
5. $-1/4\leqslant k\leqslant1/4$. Указание. Поскольку $y\geqslant0$, $x=y^2$, мы должны вычислить, при каких k уравнение $2ky^2-2y+4k+1=0$ (*) имеет хотя бы один неотрицательный корень. При $k=0$ $y=1/2$. Если же $k\neq0$, то уравнение (*) имеет корни при $-1/2\leqslant k\leqslant-1/4$, причем при $\frac{4k+1}{2k}\leqslant0$, т. е. при $-\frac{1}{4}\leqslant k<0$, произведение корней неположительно и поэтому один из корней неотрицателен. При $-\frac{1}{2}\leqslant k<\frac{1}{4}$ корни отрицательны. Наконец, при $0<k\leqslant\frac{1}{4}$ корни положительны.

6. $a^2\sqrt{14}/3$ Решение. Пусть прямая AE ($A_1E=ED_1$) пересекает продолжение ребра DD_1 в точке S (рис. 1). Тогда $D_1S=DD_1=a$.
Из подобия треугольников SD_1L, SHO и SDK следует, что $D_1L=a/3$ и $DK=2a/3$.
Полученное сечение — трапеция $AELK$ с основанием $AK=a\sqrt{1+(2/3)^2}=a\sqrt{13}/3$. Чтобы найти высоту трапеции, проведем $DT\perp AK$, тогда $ST\perp AK$ и $GT=ST/2=a\sqrt{2^2+(2/\sqrt{13})^2}/2=$ $=a\sqrt{14/13}$.
Если провести сечение, расположенное между точкой D_1 и данным сечением и параллельное ему, получится также трапеция с той же высотой, но с меньшими основаниями; если секущая плоскость находится между точками D и D_1, то в сечении получается треугольник. В этих случаях площадь сечения, очевидно, меньше площади трапеции $AELK$.
Если секущая плоскость расположена между данным сечением и точкой A_1, то получается пятиугольник $PNMRQ$, который можно представить как параллелограмм $UNMR$ со срезанным углом UPQ. И наконец, если секущая плоскость проходит через точку A_1, то получается параллелограмм A_1K_1CV, одна из вершин которого совпадает с вершиной куба A_1, а противоположная — с вершиной C. Действительно, так как $EA_1=D_1E$, то $LK_1=D_1L=a/3$ и $KC=LK_1=a/3$. Следовательно, сечение, имеющее форму параллелограмма, — единственное.
Так как параллелограмм A_1K_1CV равен параллелограмму $UNMR$, его площадь больше площади любого сечения, имеющего форму пятиугольника, трапеции или треугольника.

Основание VC параллелограмма равно основанию AK трапеции, а его высота равна высоте трапеции, следовательно, площадь параллелограмма A_1K_1CV равна $S_{A_1K_1CV}=\frac{a\sqrt{13}}{3}\cdot\frac{a\sqrt{14}}{\sqrt{13}}=$ $=\frac{a^2\sqrt{14}}{3}$.

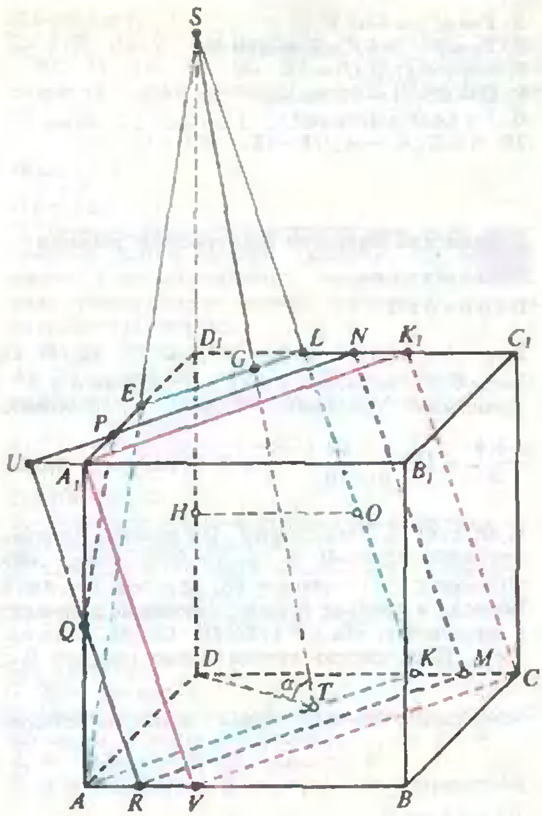


Рис. 1.

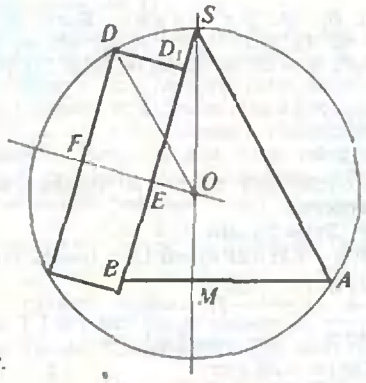


Рис. 2.

Вариант 2

1. 20 км/ч, 40 км/ч. 2. $(-1)^{k+1}\pi/6+\pi k,\ k\in Z$. 3. $\{3\}$. 4. $(-2;\ 2-\log_2 3)$. Указание. Выполните замену $y=2^x$ и примените *метод интервалов.*

5. $-9/4\leqslant a<4$. Указание. Поскольку $y=x-4$, $x>0$, получаем из второго уравнения $x^2+2(a+1)x+a^2-2a-8=0$, откуда $x=-(a+1)\pm\sqrt{4a+9}$. Для существования решения системы необходимо и достаточно, чтобы $\sqrt{4a+9}>a+1$. Решая это неравенство относительно a, приходим к ответу.

6. $25R^3/54$. Решение. Проведем сечение через высоту пирамиды и апофему той боковой грани, в плоскости которой лежит основание призмы (рис. 2). Центры оснований призмы лежат на перпендикуляре к этой грани, проходящем через центр сферы. Так как призму можно поворачивать вокруг этого перпендикуляра, не нарушая условий задачи, будем считать, что в сечении лежит также боковое ребро DD_1 призмы. По условию $MA=BS/2$ (AS — боковое ребро пирамиды), следовательно, $BM=BS/4$. Из подобия треугольников OES и BMS находим $EO=OS/4=R/4$.

Пусть $FE=DD_1=h$ и $FD=r$. В треугольнике OFD $R^2=(h+R/4)^2+r^2$, откуда $r^2=\frac{15}{16}R^2-\frac{1}{2}Rh-h^2$.

Найдем объем призмы, считая заданной ее высоту h: $V(h)=2r^2h=2\left(\frac{15}{16}R^2h-\frac{1}{2}Rh^2-h^3\right)$.

Исследуем эту функцию на экстремум. Производная функции $V'(h)=2\left(\frac{15}{16}R^2-Rh-3h^2\right)$ равна нулю при $h=5R/12$. При этом значении h призма расположена вне пирамиды и имеет наибольший объем $\max V(h)=\frac{25}{54}R^3$.

Вторая критическая точка функции $h=-9R/12$ соответствует случаю, когда призма расположена с той же стороны боковой грани пирамиды, что и сама пирамида (а это не соответствует условию).

Физика

1. $A_{\text{тр}}=-\mu mgl/(1-\mu\operatorname{ctg}\alpha)=-0{,}05$ Дж.
2. $l=(L+v_0^2/(\mu g))/2=2{,}8$ м.
3. $v_{max}=\sqrt{2g(H-l)+mg^2/k}$.
4. $A=\dfrac{m\omega^2l_0^2(1+m\omega^2/k)}{2(1-m\omega^2/k)^2}$.
5. $v=mRT/(pMS\tau)=0{,}88$ м/с (здесь $M=44\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса углекислого газа).
6. $p=3mRT/(2MV)=3{,}5\cdot10^4$ Па (здесь $M=241\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса гидрида урана).
7. $U_1=(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2)C_2/(C_1+C_2)=17{,}5$ кВ; $U_2=(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2)C_1/(C_1+C_2)=7{,}5$ кВ.
8. $\varphi_O=(\varphi_AC_1+\varphi_BC_2+\varphi_DC_3)/(C_1+C_2+C_3)$.
9. $l=mRv_0/(B^2d^2\sin^2\alpha)$, где α — угол между вектором B и плоскостью контура.
10. $n_{\min}=\sqrt{2}$.

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика

Вариант 1

1. 2. 2. $(0;\ 0{,}01)\cup(0{,}1;\ 1000)$. 3. πn, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. 4. 120 м², 100 м³. 5. $\sqrt{3}$.

Вариант 2

1. $[-3;\ 2]$. 2. $[0;\ 3]$. 3. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{4}+\pi n,$

$2\pi n,\ n\in Z$. 4. 360 км. 5. $p_1+p_2-\sqrt{2p_1p_2}$, $\sqrt{2p_1p_2}-p_1$, $\sqrt{2p_1p_2}-p_2$.

Вариант 3

1. 3/2. 2. [0; 1]. 3. $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $(-1)^n\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. 4. 3 ч 40 мин, 2 ч 12 мин. **Указание.** Найдите отношение скоростей туристов. 5. 2,4.

Физика

1. $\varphi=(v_0-v_1)t/l=1$ рад.
2. $v_{\min}=\sqrt{gl}/2=2$ м/с.
3. $h=v^2/(2g(1-\mu\ \mathrm{ctg}\ \alpha))=67$ м.
4. $T'=8T/3=800$ К.
5. $m=2\pi\sigma r/g=11{,}5\cdot10^{-6}$ кг.
6. $q_1=6$ мкКл; $q_2=-2$ мкКл.
7. $P=\mathscr{E}I_1(1-I_1/I_2)=8$ Вт.
8. $\omega=I_m/q_m=10^7$ с$^{-1}$.
9. На расстоянии, превышающем $F/3=10$ см от ближайшей линзы.
10. $\alpha_{min}=\arccos(-0{,}28)=106°$. **Указание.** Воспользуйтесь законами сохранения энергии и импульса:

$$mc^2=E_1+E_2,$$
$$(m\cdot0{,}6c)^2=\left(\frac{E_1}{c}\right)^2+\left(\frac{E_2}{c}\right)^2+\frac{2E_1E_2\cos\alpha}{c^2},$$

где m — масса летящей частицы, E_1 и E_2 — энергии образовавшихся фотонов.

[redacted]ковский институт нефти и газа
И. М. Губкина

Математика

Вариант 1

1. —19. 2. —0,3. 3. 105. 4. —2. 5. —8. 6. 1. 7. 0,1. 8. 3,95. 9. 2. 10. —3. 11. 0,5. 12. —30. 13. 13. 14. 4. 15. 2. 16. 5.

Вариант 2

1. 4. 2. 3. 3. 0,2. 4. 1. 5. 24. 6. 6. 7. —3. 8. 0,4. 9. 3. 10. —3. 11. 2. 12. 4. 13. 20. 14. 3. 15. 12. 16. 2,25.

Физика

Вариант 1

1. $l=2(v_0+gt)^2/(g\ \mathrm{tg}\ \alpha)=80$ м.
2. $Q=mv^2/4=25$ Дж.
3. $k=\sqrt[3]{n^2}=9$.
4. $\Delta\rho=\rho/(n-1)=400$ кг/м^3.
5. $T=\Delta T/n=250$ К (здесь $\Delta T=1$ К).
6. $v=mRT/(pMS\tau)=20$ м/с.
7. $W=CE^2d^2/2=2$ мкДж.
8. $r=\mathscr{E}\sqrt{R/P}-R=0{,}1$ Ом.
9. $R=\sqrt{2U/\gamma}/B=0{,}1$ м.
10. $F=2f_1f_2/(f_1+f_2)=32$ см.

Вариант 2

1. $h=g(n+1)^2(\Delta t)^2/8=80$ м (здесь $\Delta t=1$ с).
2. $\Delta W=m(v_0\sin\alpha)^2/2=9$ Дж.
3. $T=3mg\cos\alpha=4{,}5$ Н.
4. $x=\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{1-n}}=2.$
5. $T=nT_0=546$ К.
6. $T_0=T-MA/(mR)=270$ К.
7. $n=1+It/(CU)=13$.
8. $Q=BS/R=50$ мкКл.
9. $l=4Aft=480$ см.
10. $n=3(A_1-A_2)/4-(Z_1-Z_2)=11$.

[redacted]ковский институт электронной техники

[redacted]ематика

Вариант 1

1. $a-b=5$. 2. 6. 3. $\{-1;\ 7\}$. 4. $\{(2;\ 4),\ (4;\ 2)\}$. 5. $(-3;\ 1)$. 6. 15,5. **Указание.** Пусть a и b — основания трапеции. Тогда, по условию, $\frac{a+b}{2}=10$, $\frac{a+10}{b+10}=\frac{3}{5}$. 7. $1/(2\sqrt{2})$. 8. 2,5 кг.

9. $\{0;\ \pi/6;\ \pi\}$. **Указание.** Из условия следует, что либо $\mathrm{tg}\ x=0$, т. е. $x=0$ и $x=\pi$, либо $\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{3}$, $\mathrm{tg}\ x>0$, $0\leqslant x\leqslant\pi$. Возводя в квадрат второе уравнение, приходим к уравнению $\sin x=1/2$. 10. (2; 5). **Указание.** Неравенство эквивалентно системе $0<\frac{1}{2}\log_x(6-x)<1$, решая которую, следует рассмотреть два случая: $0<x<1$ и $x>1$.

Вариант 2

1. $2\sqrt{3}$. 2. 2. 3. $a=1/2$. 4. $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$.

5. (0; 1). 6. $\sqrt{5}$. **Указание.** Если $3x=AD$, $3y=BE$, то $4y^2+x^2=4$, $y^2+4x^2=9/4$, $AB^2=4(x^2+y^2)$. 7. $\pi/2$. 8. 32 км/ч. 9. 1. 10. $\{-4;\ 2\}$.

Физика

Вариант 1

1. $\rho=30\pi/(GT^2)\approx3\cdot10^3$ кг/м^3 (здесь $T=6$ ч).
2. Да, сможет.
3. $\mathscr{E}=v^2/(2\gamma)=15$ кВ.
4. $m=M(I_0+I_1)\tau/(2Fn)\approx0{,}13$ г (здесь $I_0=5$ А, $I_1=3$ А).
5. $l=\left(\dfrac{h}{\sin\varphi}+\dfrac{H}{\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}}\right)\cos\varphi\approx1{,}1$ м.
6. $t=T\log_2 n\approx53$ сут.

Вариант 2

1. $l_0=(l_1m_1+l_2m_2)/(m_1+m_2)=6{,}4$ см.
2. $p'=p+QR/(C_VV)\approx200$ кПа.
3. $R=Edr/(\mathscr{E}-Ed)=2$ Ом.
4. $v=UD/(\sqrt{2}nBS)\approx3{,}5$ м/с.
5. $x=lF/d=1{,}25$ см.
6. $W_k=h(c/\lambda-\nu_{\min})\approx3{,}8\cdot10^{-19}$ Дж.

[redacted]овский энергетический институт

[redacted]ематика

Вариант 1

1. $f'(x)=2x-3$, $x<-3$. 2. $\{-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\}$. 3. 4 руб.— за первую книгу, 2 руб.— за вторую. 4. $\{-2\pi;\ -\pi;\ 0;\ \pi;\ 2\pi\}$. 5. 29π.

Вариант 2

1. $1/2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$. 2. $(-\infty;\ -2] \cup [0;\ 1) \cup (1;\ 2] \cup [4,\ +\infty)$. 3. Собственная скорость лодки должна лежать в интервале (4 км/ч; 12 км/ч). 4. $1/15$. 5. $(\sqrt[3]{4}/2)a$.

Физика

Вариант 1

2. В возникающем электрическом поле заряженные капли краски движутся по направлению к окрашиваемому предмету. В результате уменьшаются потери краски и степень загрязнения воздуха.
3. $R_{AB} = 5$ Ом.
4. $l = v_{зв} t \approx 8500$ м $=$ 8,5 км (здесь $v_{зв} \approx \approx 340$ м/с — скорость звука в воздухе).
5. $T_1 = \dfrac{T_2}{1 - \eta/100\,\%} = 375$ К.

Вариант 2

2. Сила притяжения зарядов увеличится.
3. $V = mv^2/(3p) = 0{,}53$ м^3.
4. $x_m = \mu(M+m)g/(2k)$.
5. $F = \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{L-l}{2}\right)\left(\dfrac{L-l}{2} + l\right) = 0{,}21$ м.

Вариант 3

2. Нет, нельзя.
3. Напряженность поля направлена вертикально вверх и равна $E = 2mg/Q$.
4. $F = (M+m)a/2 + 2\mu\, mg = 25$ Н.
5. $\mathscr{E} = I_1 I_2 R/(I_1 - I_2)$.

[redacted]нт» для младших школьников»
[redacted]«Квант» № 4)

1. Так как $(10a+b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$, то предпоследняя цифра этого числа будет нечетной только в том случае, если число десятков числа b^2 будет нечетным. Это имеет место лишь для $b=4$ и $b=6$. Поэтому последней цифрой указанного числа может быть только 6.
2. Пусть студентов было x человек. Тогда в турнире приняло участие $(x+2)$ человека и всего было набрано $\dfrac{(x+2)(x+1)}{2}$ очков. Отсюда каждый студент набрал $\left(\dfrac{(x+2)(x+1)}{2} - 6{,}5\right) : x$ очков. После преобразований получаем число $\dfrac{x^2+3x-11}{2x}$. Это число будет целым числом или половиной целого числа лишь в том случае, если $x = 11$, так как $\dfrac{x^2+3x}{2x}$ — всегда целое число или половина целого числа.
3. $65\,983 + 65\,983 + 65\,983 = 197\,949$.
4. Расмотрим разность между удесятиренным полученным числом и первоначальным числом: $(10a+40b) - (10a+b) = 39b$. Так как $39b$ делится на 13, из делимости на 13 одного «слагаемого» следует делимость на 13 и другого «слагаемого».
5. Из рисунка 3 видно, что эти треугольники имеют по основанию и высоте, равным катетам исходного прямоугольного треугольника.

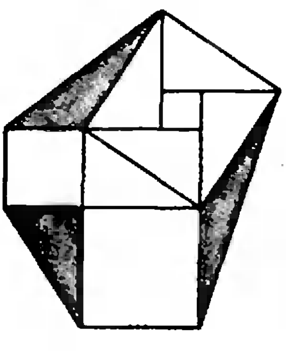


Рис. 3.

[redacted]йдоскоп «Кванта»
[redacted]«Квант» № 4)

1. Только в поле, силовые линии которого прямые, и если начальная скорость частицы направлена по силовой линии.
2. Отклонение протона в два раза больше.
3. Электрон начнет ускоряться под влиянием положительных индуцированных зарядов, возникающих на суживающейся части трубы.
4. При определенной — достаточно большой — начальной скорости заряд уйдет в бесконечность; при меньших скоростях он будет совершать периодическое движение вдоль оси кольца.
5. Да, если частица движется вдоль эквипотенциальной поверхности.
6. Вертикально вверх.
7. Более быстрые частицы отклоняются на меньший угол.
8. При увеличении скорости растут магнитные силы притяжения между частицами, и расхождение будет меньше.
9. Такая стрелка была бы неподвижной относительно электронов и не обнаружила бы магнитного поля.
10. Нет, так как действующая на частицу сила Лоренца не совершает работы.
11. По винтовой линии с увеличивающимся шагом, причем ось спирали параллельна $\vec{E}$ и $\vec{B}$.
12. Заряженные частицы сносятся магнитным полем Земли к полюсам, возбуждая там молекулы кислорода и азота, которые затем высвечиваются.

Микроопыт

Поднесенный к экрану телевизора магнит будет искажать изображение из-за воздействия магнитного поля на движение электронов в кинескопе.

Вниманию наших читателей

Магазин № 3 «Книга — почтой» «Академкниги» высылает наложенным платежом следующие книги:

Ветров Г. С. *С. П. Королев в авиации. Идеи. Проекты. Конструкции.* (История науки и техники).— 1988.— 55 к.

Власов В. К., Королев Л. Н., Сотников А. Н. *Элементы информатики.* (Библиотечка программиста).— 1988.— 1 р. 30 к.

Глушков В. М. *Основы безбумажной информатики.*— 1987.— 2 р. 60 к.

Кибернетика: прошлое для будущего. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения).— 1989.— 50 к.

Николов Р., Сендова Е. *Начала информатики. Язык Лого.*— 1989.— 40 к.

Персональный компьютер: Рабочее место профессионала. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения).— 1989.— 80 к.

Фролова Г. В. *Педагогические возможности ЭВМ. Опыт. Проблемы. Перспективы.*— 1988.— 70 к.

Заказы направляйте по адресу: 117393, Москва, ул. Академика Пилюгина, д. 14, корп. 2, магазин № 3 «Книга — почтой».

Номер подготовили:
А. Буздин, А. Виленкин, М. Денисова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, И. Клумова, Т. Петрова,
С. Табачников, В. Тихомирова

Номер оформили:
М. Дубах, С. Иванов, Д. Крымов, С. Лухин,
Э. Назаров, И. Смирнова, Л. Тишков,
П. Чернуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Корректор М. Дронова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 19.02.90. Подписано к печати 11.04.90
Т-06541. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1
Гарнитура школьная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,88
Тираж 172 226 экз. Заказ 251. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

ШЕСТОЙ ЧЕМПИОНАТ МИРА

В отличие от людей у компьютеров сбоев в розыгрыше шахматной короны не бывает — начиная с 1974 года аккуратно раз в три года определяется сильнейшая шахматная программа в мире (речь сейчас идет не о микрокомпьютерах, а о больших ЭВМ). Очередной, шестой чемпионат состоялся в Канаде летом 1989 года. В нем участвовало рекордное число программ — 24, в том числе первые 4 призера предыдущего первенства: «Крэй блитц», «Хайтек», «Бебе» и «Сан Феникс». Впервые в борьбу за корону вступила американская программа «Дип сот» («Deep Thought» — «глубокая мысль» в переводе с английского). Вместе с большими машинами играли и микрокомпьютеры. Соревнование, как всегда, проводилось по швейцарской системе в 5 туров с нормальным контролем времени — 2 часа на 40 ходов.

Главные события развернулись в последних двух турах. В 4-м произошла символическая передача компьютерной короны.

(В примечаниях к партиям использован материал из журнала «ICCA JOURNAL», издаваемого Международной ассоциацией компьютерных шахмат.)

«Дип сот» — «Крэй блитц»
Дебют ферзевых пешек

1. d4 Kf6 2. Kc3 d5 3. Cg5 Cf5 4. e3 Ke4 5. K:e4 C:e4 6. f3 Cf5 7. c4 c6 8. Фb3 Фa5+ 9. Kpd1 Cc8 10. Cf4 Kd7. После 10...dc 11. C:c4 e6 белые развиты несколько лучше, но их королю требуется время, чтобы пристроить себя, так что, осуществив программное c6 — c5 или e6 — e5, «Крэй блитц» могла смело смотреть в будущее.

11. cd Ф:d5. При 11...cd 12. Cb5 e6 13. Лc1 давление белых довольно неприятно. А теперь начинается долгое преследование черного ферзя, и до конца партии «Крэй блитц» так и не вырвется из тисков.

12. Cc4 Фf5 13. g4 Фf6 14. g5 Фf5 15. Ke2 e6 16. e4 Фg6 17. h4 h6 18. gh gh 19. Kpc2 b5 20. h5 Фf6 (20...bc 21. Ф:c4 и 23. Ф:c6, забирая ладью) **21. Cd3 e5 22. de K:e5 23. Фc3 Cd6 24. a3 Cd7 25. Cg3 Cb8 26. f4 Kg4 27. e5 Фe6 28. Kd4 Фd5 29. Лae1 Лg8 30. Ch7 Лg7 31. Ce4 Фc4 32. Ф:c4 bc.** Разменом ферзей черным удалось избавиться от мощного прессинга противника, но именно в этот момент «Дип сот» наносит эффектный заключительный удар.

33. e6! fe 34. K:e6 Лg8 35. Cg6+ Л:g6 36. hg C:e6 37. Л:e6+ Kpd7 38. g7 C:f4 39. Лg6 Ke3+ 40. Kpc1 C:g3 41. Л:g3 Лg8 42. Л:e3 Л:g7 43. Л:h6 Kpc7 44. Лee6. Черные сдались.

«Хайтек» в этот день выиграла у «Фиделити» и перед последним туром была единственной программой, уступающей «Дип сот» пол-очка. Лидеру достаточно было сделать ничью, но напряженная схватка принесла ему еще одну, уже пятую подряд победу.

«Хайтек» — «Дип сот»
Дебют ферзевых пешек

1. d4 d5 2. Kf3 Kf6 3. Cf4 e6 4. e3 Kc6? В ферзевых дебютах не принято загораживать пешку «c», и защита Чигорина — 1.d4 d5 2.c4 Kc6 — лишь исключение (крайне редкое!), подтверждающее правило. **5. Kbd2.** Загадки с пешками «c» продолжаются. Почему-то и белые избегают естественного 5. c4 и 6. Kc3. **5...Ce7 6. h3 0—0 7. Ce2 Kh5?** И другой черный конь ведет себя не слишком солидно — нападает на слона уже после того, как подготовлено его отступление на h2. **8. Ch2 g6.** Коню следовало признать свою вину и отступить обратно на f6, но черные и не помышляют об этом. А поскольку на h5 конь чувствует себя уязвимо, он подкрепляется пешкой. **9. 0—0 f5.** Вот в чем дело: оказывается, компьютер давно задумал марш пешки «f». Но сразу 8...f5 не годилось из-за 9. Ke5 K:e5 10. de, и конь черных на отшибе, а 9...Kf6 10. K:c6 bc вело к нежелательному сдвоению пешек. Все же в стратегическом отношении позиция малопривлекательна для черных. После 10. c4! давление белых по линии «c» возрастало, и даже после 10. Ke1 Kf6 11. Kd3 и затем c2 — c4 их перевес был бы бесспорен. Но «Хайтек» допускает ужасный позиционный промах. **10. Ce5?** Стратегические дефекты этого хода очевидны: белые добровольно отказываются от пары слонов, снимают давление с пункта c7 и освобождают противнику весь ферзевый фланг. **10...K:e5 11. K:e5 Kf6 12. c4 c5 13. Kdf3 Cd6 14. a3.** Белым следовало разменяться в центре. **14...Фc7. 15. Лc1 a5 16. Фb3 b6 17. Фa4 Cb7.** Два вялых хода белого ферзя передали инициативу противнику, и теперь, когда центр вскроется, пара дальнобойных черных слонов разовьет опасную деятельность. **18. Лc2 Kph8 19. cd C:d5 20. Лd1 Лad8 21. Cd5 Ke4 22. Kd7 Лg8 23. Kfe5 Лg7.** Угрозы отражены, и конь d7 оказался не у дел. **24. Лd3 Ce7 25. Лd1 h5 26. Лdc1 Cg5 27. Лe1 Ch4 28. Лf1 Ce7 29. Лfc1 g5 30. f3 Kf6 31. Kpf1 g4 32. hg hg 33. f4 Ce4 34. Лd2 Kd5 35. Лe2 Лh7 36. Лee1 K:e3+! 37. Kpg1 Kd5 38. Kg6+ Kpg7 39. K:e7 Ф:f4!** Уже здесь «Хайтек» могла спокойно сдаться ввиду форсированного мата в 8 ходов.

40. K:f5+ ef 41. Л:e4 Ф:c1+ 42. Cf1 fe 43. Фb3 Лh1+ 44. Kp:h1 Ф:f1+ 45. Kph2 Лh8+ 46. Фh3 g3+ 47. Kp:g3 Фf4×.

«Крэй блитц», выиграв в последнем туре, догнала «Хайтек», и в компании с «Мефисто» они поделили 3—5 места (по 3,5 очка). Фокусы «Швейцарки»: после поражения от «Крэй блитц» программа «Бебе» отскочила во второй эшелон, где набрала 4 очка — чистое второе место.

По общему мнению, уровень игры «Дип сот» на два порядка выше, чем у ее соперников, и, похоже, мы не совсем представляем себе тот огромный прогресс, который достигнут в области компьютерных шахмат за последние три года.

Е. Гик

45 коп.
Индекс 70465

Чтобы сделать эту головоломку, вам понадобятся 14 одинаковых шариков и коробка в форме куба с ребром $(1+\sqrt{2})d \approx 2{,}41d$, где d — диаметр шарика. Из 13 шариков склеиваются 4 фигурки, показанные на рисунке 1 (тупые углы — по 120°). Требуется уложить эти фигурки в коробку так, чтобы каждой ее стороны касались 4 шарика (рис. 2). Второе задание — добавить оставшийся шарик и переложить фигурки так, чтобы каждой стороны коробки касались уже 5 шариков, как на рисунке 3. (Решения — в следующем номере.) Если мысленно отметить внутри коробки центры шаров обеих конфигураций, то все 27 точек попадут в узлы кубической решетки. Говоря точнее, центры 14 шаров рисунка 3 совпадут с вершинами куба с ребром $d\sqrt{2}$ и центрами его граней, а центры 13 шаров рисунка 2 — с серединами ребер этого куба и его центром. При этом каждый «угловой» шарик (рис. 3) касается трех «центрогранных», а каждый «центрогранный» — четырех угловых; каждый «реберный» (рис. 2) касается четырех других «реберных» и внутреннего центрального, а последний — всех 12 «реберных». Все эти свойства наших конфигураций вы можете проверить самостоятельно или познакомившись с заметкой В. Произволова «Тринадцать шаров в одной клетке» («Квант», 1986, № 10, с. 22), из которой вы узнаете и о том, какое отношение к 13 шарам имел... Исаак Ньютон.

Д. К.

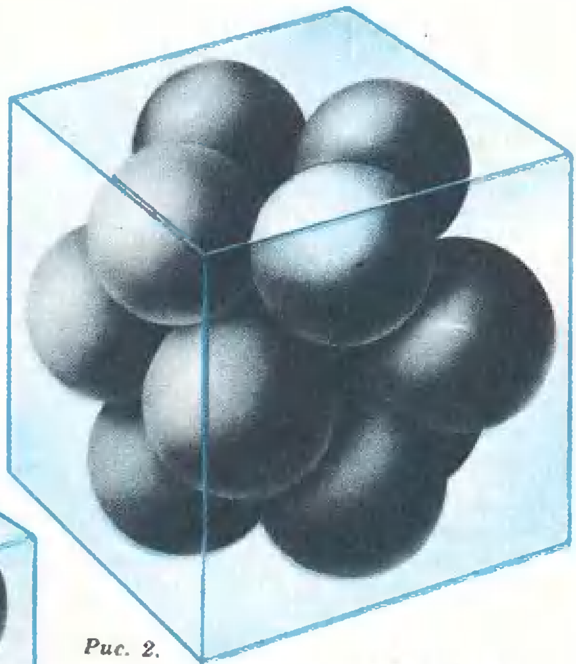


Рис. 2.

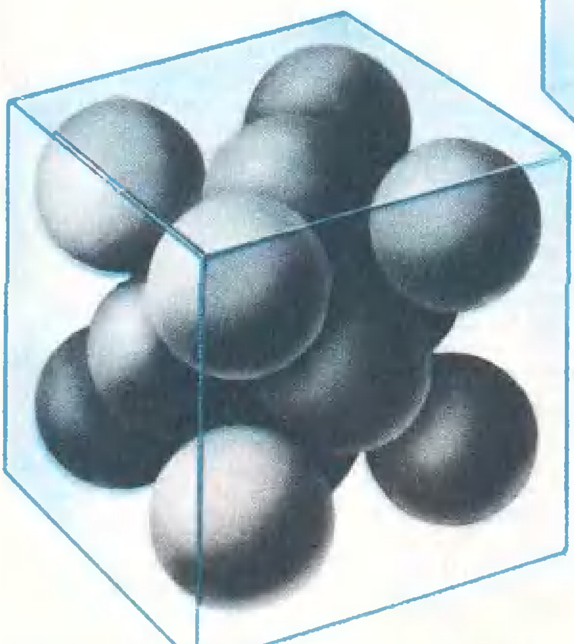


Рис. 3.

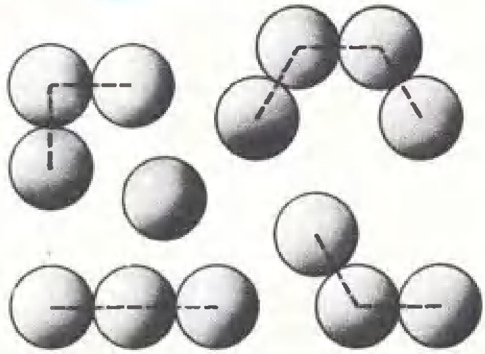


Рис. 1.